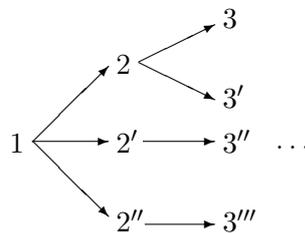


III.1.3 Radioaktive Zerfallsreihen

Das Produkt eines radioaktiven Zerfalls kann selbst instabil sein und später zerfallen, und so weiter, sodass ganze *Zerfallsreihen* $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow \dots$ entstehen können. Beispielsweise führen drei lange Zerfallsreihen von den instabilen aber langlebigen Nukliden ^{232}Th , ^{235}U und ^{238}U nach etwa 10–15 Stufen zu stabilen Isotopen von Blei (s. auch Abschn. III.2).

Im allgemeinsten Fall existieren sogar bei jeder Generation verschiedene Zerfallskanäle. Somit tauchen Verzweigungen in die Zerfallskette auf:



Dazu können Zerfallsprodukte auf unterschiedlichen Zweigen eigentlich identisch sein, z.B. könnten $3'$ und $3''$ gleich sein, so dass verschiedene Wege von einem Ausgangs- zu einem Endnuklid führen können.

Unter Betrachtung dieser Möglichkeiten lässt sich dann fragen, wie viele Kerne es von irgendeinem Element als Funktion der Zeit gibt?

Die Antwort zu dieser Frage ist ziemlich einfach, vorausgesetzt die elementare Ab- bzw. Zunahme der Anzahl der Kerne einer gegebenen Art im Zeitelement dt mithilfe vom Zerfallsgesetz (III.7) unter Berücksichtigung der „Erhaltung der Materie“ — genauer handelt es sich dabei um die Erhaltung der durch die Protonen und Neutronen getragenen Baryonenzahl — sorgfältig geschrieben wird.

Ein einfaches Beispiel bildet die Zerfallsreihe mit als erste Stufe dem Zerfall $1 \rightarrow 2$, mit gesamter Zerfallskonstante λ_1 und Verzweigungsverhältnis f_{12} , und als zweite Stufe dem Zerfall $2 \rightarrow \dots$ mit der totalen Zerfallsrate λ_2 . Wie entwickeln sich dann $N_1(t)$ und $N_2(t)$? (Hier werden die Entwicklungen der anderen Tochterkerne $2'$, $2'' \dots$ sowie der Produkte des Zerfalls $2 \rightarrow \dots$ nicht betrachtet.)

Das Zerfallsgesetz (III.1) gibt für den Zerfall der Kerne vom Typ 1

$$dN_1(t) = -\lambda_1 N_1(t) dt \quad \Rightarrow \quad N_1(t) = N_1(0) e^{-\lambda_1 t}.$$

Die $dN_1(t)$ zerfallenden Typ-1 Nuklide führen zu $f_{12} dN_1(t)$ Kernen vom Typ 2 — sowie in die andere Kanäle zu $(1-f_{12}) dN_1(t)$ Kernen einer anderen Art —, deren darauffolgende Zerfall durch Gl. (III.1) beschrieben wird, sodass die Änderung zwischen t und $t + dt$ der Anzahl von Typ-2 Kernen durch

$$dN_2(t) = \lambda_1 f_{12} N_1(t) dt - \lambda_2 N_2(t) dt$$

gegeben wird. Unter Berücksichtigung der gefundenen Form für $N_1(t)$ liefert diese Bilanzgleichung die inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dN_2(t)}{dt} = \lambda_1 f_{12} N_1(0) e^{-\lambda_1 t} - \lambda_2 N_2(t). \quad (\text{III.13})$$

Diese lässt sich in zwei Schritten lösen:

- Die allgemeine Lösung der assoziierten homogenen Differentialgleichung $\frac{dN_2(t)}{dt} = -\lambda_2 N_2(t)$ ist $N_2(t) = c_2 e^{-\lambda_2 t}$, wobei c_2 eine Konstante ist;

- eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung (III.13) ergibt sich durch „Variation der Konstanten“: das Einsetzen des Ansatzes $N_2(t) = c_2(t) e^{-\lambda_2 t}$ in Gl. (III.13) lautet

$$\frac{dN_2(t)}{dt} = \frac{dc_2(t)}{dt} e^{-\lambda_2 t} - \lambda_2 c_2(t) e^{-\lambda_2 t} = \lambda_1 f_{12} N_1(0) e^{-\lambda_1 t} - \lambda_2 c_2(t) e^{-\lambda_2 t}.$$

Die Integration der daraus folgenden Zeitableitung $dc_2(t)/dt$ liefert sofort

$$c_2(t) = \frac{\lambda_1 f_{12}}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1(0) e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + K_2,$$

wobei K_2 eine Konstante ist. Man erhält also

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1 f_{12}}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1(0) e^{-\lambda_1 t} + K_2 e^{-\lambda_2 t}.$$

Die unbekannte Konstante lässt sich mithilfe der Bedingung bei $t = 0$ berechnen:

$$N_2(0) = \frac{\lambda_1 f_{12}}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1(0) + K_2$$

sodass schließlich

$$N_2(t) = N_2(0) e^{-\lambda_2 t} + \frac{\lambda_1 f_{12}}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1(0) (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}). \quad (\text{III.14})$$

Im Folgenden wird diese Lösung für verschiedene mögliche Verhältnisse zwischen den Zerfallskonstanten λ_1 und λ_2 studiert. Der Einfachheit halber wird nur der Fall $N_2(0) = 0$ betrachtet.

- **Fall a:** $\lambda_1 \gg \lambda_2$ d.h. $\tau_1 \ll \tau_2$: der Anstieg der Tochterkernmenge ist schneller als ihr Zerfall.

Dies ist z.B. der Fall für die ${}^{131}_{52}\text{Te} \xrightarrow{\beta^-} {}^{131}_{53}\text{I} \xrightarrow{\beta^-} {}^{131}_{54}\text{Xe}$ -Zerfallskette: die jeweiligen Halbwertszeiten sind $T_{1/2}({}^{131}\text{Te}) = 25 \text{ mn} \ll T_{1/2}({}^{131}\text{I}) = 8 \text{ d}$ (Tage).

Die Anzahl von Tochterkernen (III.14) lautet

$$N_2(t) \sim \begin{cases} \lambda_1 f_{12} N_1(0) t & \text{für } t \ll \tau_1; \\ f_{12} N_1(0) e^{-\lambda_2 t} & \text{für } t \gg \tau_1. \end{cases}$$

$N_2(t)$ wächst zuerst linear mit der Zeit t – was die bei kleinen Zeiten fast lineare Abnahme von $N_1(t)$ spiegelt –, dann sinkt bei großen Zeiten exponentiell mit der Zerfallskonstante λ_2 . Dieses Verhalten wird in Abb. III.1 dargestellt.

- **Fall b:** $\lambda_1 \lesssim \lambda_2$ d.h. $\tau_1 \gtrsim \tau_2$.

Beispielsweise ${}^{140}_{56}\text{Ba} \xrightarrow{\beta^-} {}^{140}_{57}\text{La} \xrightarrow{\beta^-} {}^{140}_{58}\text{Ce}$: $T_{1/2}({}^{140}\text{Ba}) = 12,75 \text{ d}$, $T_{1/2}({}^{140}\text{La}) = 1,68 \text{ d}$.

Aus Gl. (III.14) ergibt sich

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1 f_{12}}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1(0) e^{-\lambda_1 t} (1 - e^{-(\lambda_2 - \lambda_1)t}) \sim \frac{\lambda_1 f_{12}}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1(t) \text{ für } t \gg \tau_1,$$

d.h. das Verhältnis der Anzahlen von Tochter- und Mutterkernen $N_2(t)/N_1(t)$ ist für $t \gg \tau_1$ ungefähr konstant: man spricht von einem *transienten Gleichgewicht*, d.h. einem sich zeitlich ändernden Gleichgewicht.

Folglich nehmen die beiden Kernarten mit derselben Rate λ_1 ab, wie in Abb. III.2 dargestellt wird: in logarithmischer Skala (Strichlinien) sind $N_1(t)$ und $N_2(t)$ für $t \gg \tau_1$ Geraden mit derselben Steigung.

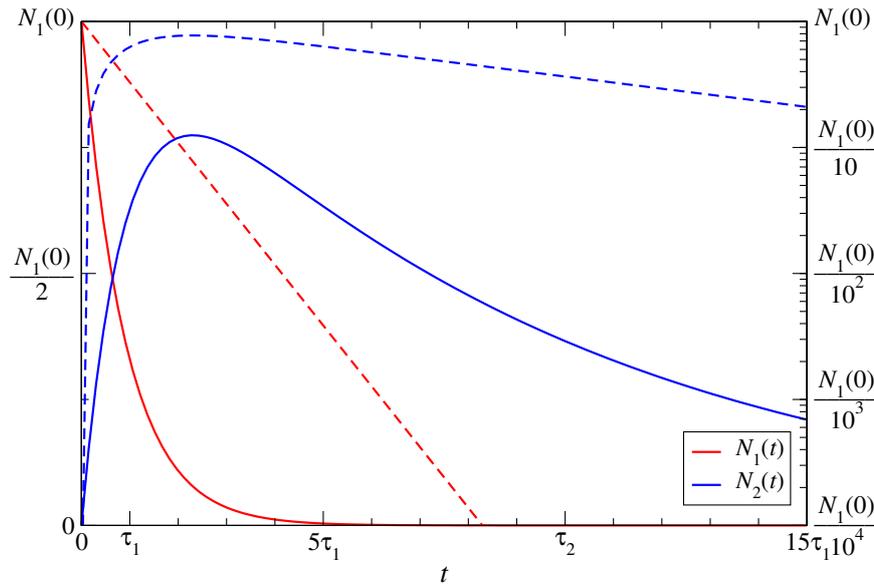


Abbildung III.1 – Entwicklung der Anzahl von Mutter- bzw. Tochterkernen $N_1(t)$ bzw. $N_2(t)$ im Fall $\lambda_1 \gg \lambda_2$ (genauer gesagt $\lambda_1 = 10\lambda_2$). Volllinien: lineare Skala; Strichlinien: logarithmische Skala.

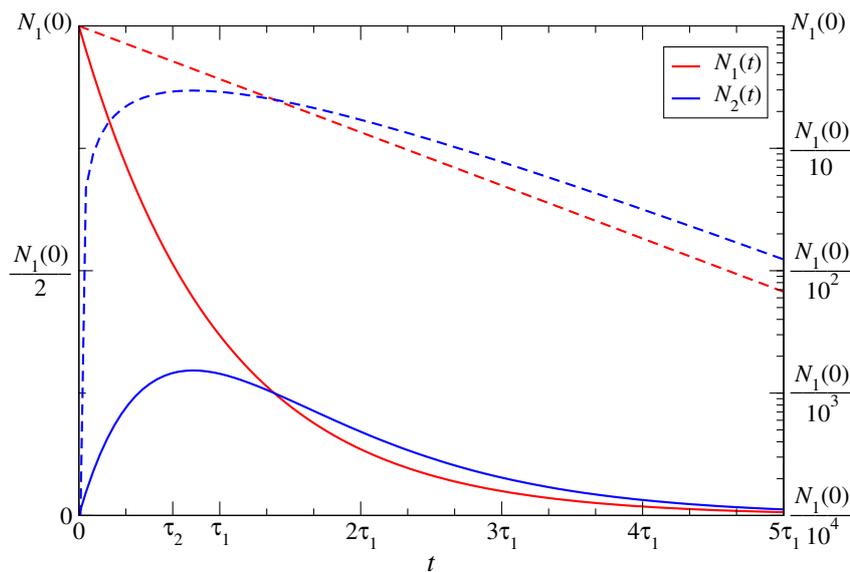


Abbildung III.2 – Zeitentwicklung der Anzahl von Mutter- bzw. Tochterkernen $N_1(t)$ bzw. $N_2(t)$ im Fall $\lambda_1 \lesssim \lambda_2$ (hier $\lambda_1 = \frac{2}{3}\lambda_2$). Volllinien: lineare Skala; Strichlinien: logarithmische Skala.

- **Fall c:** $\lambda_1 \ll \lambda_2$ d.h. $\tau_1 \gg \tau_2$: der Mutterkern ist viel langlebiger als der Tochterkern.

Dieser Fall kommt insbesondere in den drei aus Aktinoiden stammenden natürlichen Zerfallsreihen (s. Abschn. [III.2](#)) häufig vor.

Z.B. ${}_{92}^{238}\text{U} \xrightarrow{\alpha} {}_{90}^{234}\text{Th} \xrightarrow{\beta^-} {}_{91}^{234}\text{Pa}$: $T_{1/2}({}^{238}\text{U}) = 4,47 \cdot 10^9 \text{ a} \gg T_{1/2}({}^{234}\text{Th}) = 24,1 \text{ d}$.

Dann ergibt sich

- für $t \ll \tau_2$: $N_1(t) \sim N_1(0)$ und $N_2(t) \sim \lambda_1 f_{12} N_1(0) t$;
- für $\tau_2 \ll t \ll \tau_1$: $N_1(t) \sim N_1(0)$ und $N_2(t) \sim \frac{\lambda_1 f_{12}}{\lambda_2} N_1(0) = \text{Konstante}$:
diese langdauernde Gleichmässigkeit der Anzahl N_2 von Tochterkernen wird *säkulares*

Gleichgewicht genannt: [\(44\)](#)

- für $\tau_1 \ll t$ nimmt $N_2(t) \sim \frac{\lambda_1 f_{12}}{\lambda_2} N_1(t)$ exponentiell mit der Zerfallskonstante λ_1 ab.

Hier taucht wie im vorigen Fall ein transientes Gleichgewicht auf: $N_1(t)$ und $N_2(t)$ sind selbst nicht konstant, deren Verhältnis bleibt aber konstant.

Dieses Verhalten zeigt Abb. [III.3](#).

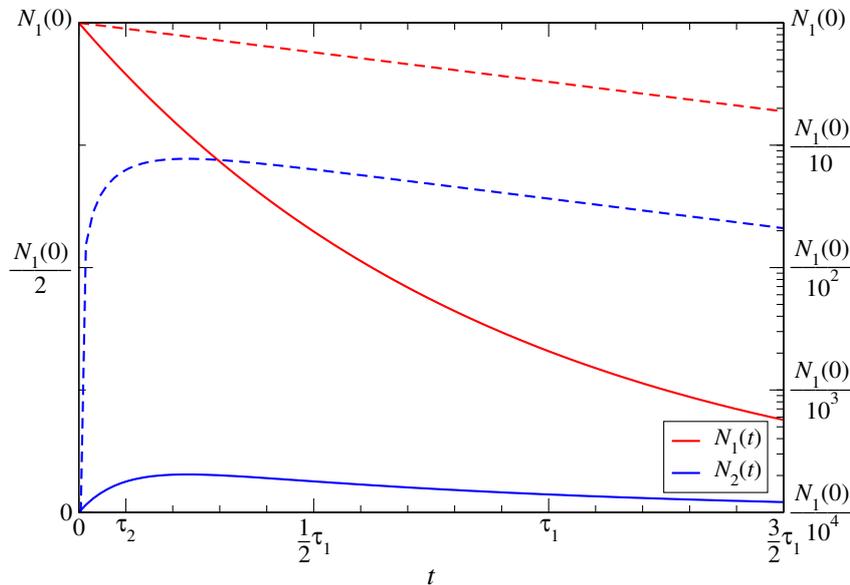


Abbildung III.3 – Zeitentwicklung der Anzahl von Mutter- bzw. Tochterkernen $N_1(t)$ bzw. $N_2(t)$ im Fall $\lambda_1 \ll \lambda_2$ (hier $\lambda_1 = 0.1\lambda_2$). Volllinien: lineare Skala; Strichlinien: logarithmische Skala.

Als Sonderfall dieser Fallstudien kann man folgendes Problem betrachten: Wie entwickelt sich die Aktivität einer radioaktiven Substanz, wenn sie mit konstanter Produktionsrate erzeugt wird?

Eine solche gleichmäßige Erzeugungsrate kommt beispielsweise vor, falls die Substanz aus Tochterkernen besteht, deren Mutterkerne in konstanter Menge bleiben. Dies entspricht formal dem obigen Fall c, indem man den Limes einer unendlichen mittleren Lebensdauer $\tau_1 \rightarrow +\infty$ betrachtet, sodass $N_1(t)$ konstant bleibt, obzwar mit einer endlichen Zerfallsrate $\lambda_1 \ll \lambda_2$, damit neue Tochterkerne erzeugt werden (τ_1 ist daher nicht mehr der Kehrwert von λ_1).

Die Anzahl von Tochterkernen genügt dann der differentiellen Gleichung [vgl. Gl. [\(III.13\)](#)]

$$\frac{dN_2(t)}{dt} = \lambda_1 f_{12} N_1(0) - \lambda_2 N_2(t),$$

wobei der erste Term auf der rechten Seite entspricht dem Zerfall von $\lambda_1 N_1(0)$ Mutterkernen pro Sekunde. Die in Abb. [III.4](#) dargestellte Lösung dieser Gleichung unter der Bedingung $N_2(0) = 0$ lautet

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1 f_{12}}{\lambda_2} N_1(0) (1 - e^{-\lambda_2 t}).$$

$N_2(t)$ wächst für $t \ll \tau_2$ linear mit t , während bei großen Zeiten $t \gg \tau_2$ die Anzahl von Tochterkernen bei dem konstanten Wert $\lambda_1 f_{12} / \lambda_2$ sättigt, d.h. es zerfällt in einem gegebenen Zeitintervall so viele Kerne, wie erzeugt werden.

Dann gilt für die Aktivitäten der Mutter- und Tochterkerne $A_2(t) \underset{t \gg \tau_2}{\simeq} f_{12} A_1(t) = \text{Konstante}$.

⁽⁴⁴⁾Säkular kommt aus dem lateinischen Wort *saeculum* = Jahrhundert.

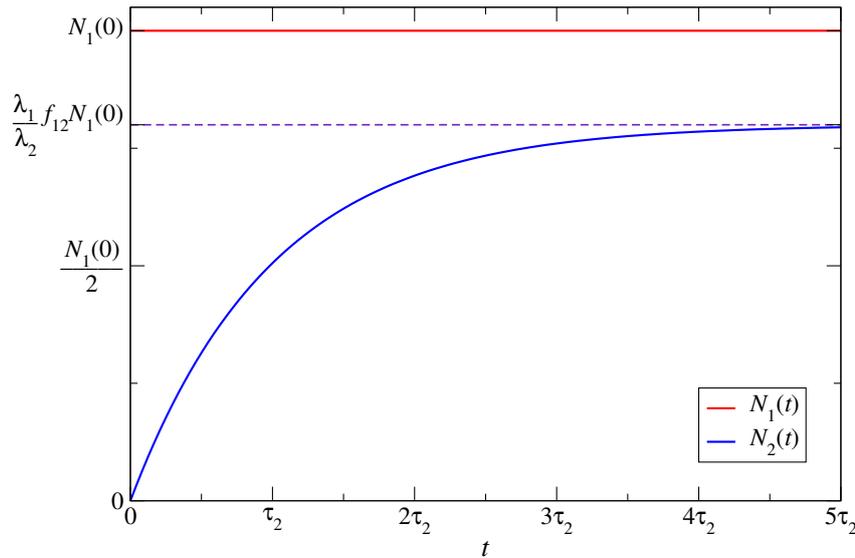


Abbildung III.4 – Zeitentwicklung der Anzahl von Mutter- bzw. Tochterkernen $N_1(t)$ bzw. $N_2(t)$ im Fall ständig neu produzierter Mutterkerne.

III.2 Natürlich vorkommende Radioisotope

Einige radioaktiven Nuklide, auch Radioisotope genannt, kommen in der Erde oder in deren Atmosphäre natürlich vor. Dabei sind zwei Herkünfte möglich.

Einerseits können sie vor der Erde entstanden, jedoch seitdem noch nicht völlig zerfallen sein. Dafür soll ihre Halbwertszeit $T_{1/2}$ der gleichen Ordnung wie das Alter der Erde $T_{\text{Erde}} \simeq 4,5 \cdot 10^9$ Jahre sein, oder sogar größer. Dies ist der Fall für ^{40}K — eine der Hauptquellen für Erdwärme, dank seiner Häufigkeit und seinem stetigen Zerfall im Erdzentrum —, ^{50}V , ^{87}Rb , ^{115}In , ^{130}Te , ^{138}La , ^{142}Ce , ^{144}Nd , ^{147}Sm , ^{176}Lu , ^{187}Re , ^{209}Bi — dessen Instabilität nur neulich entdeckt wurde [55] —, ^{232}Th , ^{235}U und ^{238}U . Alle außer ^{235}U haben $T_{1/2} > 10^9$ Jahre.

Dabei sind die drei Aktinoiden:

- ^{232}Th mit der Halbwertszeit $T_{1/2} = 1,4 \cdot 10^{10}$ Jahre
- ^{238}U mit $T_{1/2} = 4,47 \cdot 10^9$ Jahre
- und ^{235}U mit $T_{1/2} = 7,04 \cdot 10^8$ Jahre

wichtig, denn sie sind Ausgangspunkte für drei natürliche Zerfallsreihen:

Zerfallsreihe	Typ
$^{232}\text{Th} \rightarrow ^{208}\text{Pb}$	$4n$
$^{238}\text{U} \rightarrow ^{206}\text{Pb}$	$4n+2$
$^{235}\text{U} \rightarrow ^{207}\text{Pb}$	$4n+3$

mit je etwa 10–15 aufeinanderfolgenden Radionukliden, die kontinuierlich erzeugt werden. Beispielsweise tauchen in der ^{238}U -Reihe das historisch wichtige ^{226}Ra , das in der Umgebung anwesendes Edelgas ^{222}Rn , und ^{210}Po vor.

Eine solche ständige Neuerzeugung ist die Quelle der anderen natürlich vorkommenden Radionuklide. Neben den Tochterkernen eines langlebigen Mutterkerns sind noch ^3H — auch Tritium genannt, mit der Halbwertszeit $T_{1/2} = 12,32$ Jahre — und ^{14}C mit $T_{1/2} = 5730 \pm 40$ Jahre zu erwähnen. Beide Arten werden in der Erdatmosphäre durch kosmische Strahlung ständig erzeugt, z.B. über die Prozesse $n + ^{14}\text{N} \rightarrow ^3\text{H} + ^{12}\text{C}$ oder $n + ^{14}\text{N} \rightarrow p + ^{14}\text{C}$, und ihre Häufigkeit bleibt ungefähr zeitlich konstant.

Bemerkung: Ein weiteres Radionuklid, das ständig neu erzeugt wird, ist ${}^{237}_{93}\text{Np}$ — und zwar über Neutroneneinfang durch ${}^{238}\text{U}$ mit Emission von zwei Neutronen: $n + {}^{238}\text{U} \rightarrow {}^{237}\text{U} + 2n$, gefolgt durch den β^- -Zerfall von ${}^{237}\text{U}$. Dann führt ${}^{237}\text{Np}$ (Halbwertszeit $T_{1/2} = 2,144 \cdot 10^6$ Jahre) über der Zerfallsreihe der Nuklide mit $4n + 1$ Nukleonen zu ${}^{205}_{81}\text{Tl}$.

Chronometrie

Eine wichtige Anwendung der natürlich vorkommenden Radioisotope ist die Verwendung zur Bestimmung des Alters von Substanzen, in denen sie enthalten sind.

Man betrachte einen Mutterkern M, der in einen stabilen Tochterkern T mit der Zerfallskonstante λ zerfällt. Dabei darf der Mutterkern selbst kein Zerfallsprodukt sein und nur einen Zerfallskanal besitzen. Es wird angenommen, dass es (mindestens) ein anderes Isotop T' des Tochterkerns existiert, das stabil und auch selbst kein Zerfallsprodukt ist. Diese Nuklide werden hiernach „Referenzkerne“ genannt.

- Zur Zeit t_0 entsteht die Substanz, deren Alter zu bestimmen ist. Es seien dann $M_0 \equiv M(t_0)$ bzw. $T_0 \equiv T(t_0)$ bzw. $T'_0 \equiv T'(t_0)$ die Anzahlen von Mutter- bzw. Tochter- bzw. Referenzkernen, die in einer kleinen Probe erhalten sind.

- Die entsprechenden Anzahlen werden zum Zeitpunkt t_1 , d.h. in den meisten Fällen heute, gemessen: $M_1 \equiv M(t_1)$, $T_1 \equiv T(t_1)$, $T'_1 \equiv T'(t_1)$.

Nimmt man jetzt an, dass es weder Verlust oder Zuwachs an M, T oder T' zwischen t_0 und t_1 gibt — insbesondere darf T nicht Zerfallsprodukt eines anderen instabilen Mutterkerns sein —, so gelten drei Beziehungen:

Laut dem Zerfallsgesetz (III.7) ist

$$M_1 = M_0 e^{-\lambda(t_1-t_0)} \quad \text{bzw.} \quad M_0 = M_1 e^{\lambda(t_1-t_0)}. \quad (\text{III.15a})$$

Dazu sind alle zerfallenen M-Kerne in T-Kerne umgewandelt, so dass

$$M_0 + T_0 = M_1 + T_1. \quad (\text{III.15b})$$

Schließlich ist die Anzahl der T'-Kerne erhalten,

$$T'_0 = T'_1. \quad (\text{III.15c})$$

Aus diesen drei Gleichungen folgt sofort

$$\frac{T_1}{T'_1} = \frac{M_1}{T'_1} \left[e^{\lambda(t_1-t_0)} - 1 \right] + \frac{T_0}{T'_0}, \quad (\text{III.16})$$

d.h. T_1/T'_1 ist eine affine Funktion von M_1/T'_1 , mit den unbekanntem Koeffizienten $e^{\lambda(t_1-t_0)} - 1$ — dem Anstieg der Gerade — und T_0/T'_0 — dem Schnittpunkt mit der vertikalen Achse. Um diese zwei Zahlen zu bestimmen, sind zwei Messungen von T_1/T'_1 und M_1/T'_1 nötig, entsprechend zwei verschiedenen Proben der zu datierenden Substanz. Dabei wird angenommen, dass unterschiedliche Proben unter den gleichen Bedingungen entstehen, sodass das Verhältnis der Isotopenhäufigkeiten T_0/T'_0 unabhängig von t_0 ist. Um den Einfluss der letzteren Annahme zu vermindern, und die unbekanntem Werte zu überbestimmen, werden eigentlich oft mehr als zwei Proben benutzt.

Beispiele der Chronometrie mithilfe natürlicher radioaktiver Kerne sind

- Bestimmung des Alters des Solarsystems — insbesondere der Erde — mithilfe der in Meteoriten gemessenen Verhältnisse der Häufigkeiten von ${}^{87}\text{Rb}$ (Mutterkern mit Halbwertszeit $T_{1/2} = 4,8 \cdot 10^{10}$ Jahre), ${}^{87}\text{Sr}$ (Tochterkern) und ${}^{86}\text{Sr}$ (Referenzkern⁽⁴⁵⁾): somit findet man ein Alter $t_1 - t_0 = 4,53 \pm 0,02 \cdot 10^9$ Jahre [56].

⁽⁴⁵⁾Tatsächlich ist ${}^{86}\text{Sr}$ das Produkt des β^- -Zerfalls von ${}^{86}\text{Rb}$, sodass eine oben gegebene Bedingung genau gesagt nicht erfüllt ist. Da die Halbwertszeit von ${}^{86}\text{Rb}$ aber nur 18,7 Tage ist, wächst die Häufigkeit von ${}^{86}\text{Sr}$ nach ein paar Jahren nicht mehr, was im Vergleich mit einer Skala von einigen Milliarden Jahren eine vernachlässigbare Korrektur darstellt.

- Altersbestimmung organischer Verbindungen mit dem ^{14}C -Verfahren, für welches W. Libby den Nobelpreis für Chemie 1960 erhielt.⁽⁴⁶⁾
- Kalium–Argon-Datierung für Gesteine: die Mutterkerne ^{40}K ($T_{1/2} = 1,25 \cdot 10^9$ Jahre) zerfallen in ^{40}Ar — in nur 10,9 % der Fälle, sonst zerfallen sie in ^{40}Ca —, und als Referenzkern dient entweder ^{39}K oder ^{36}Ar .

⁽⁴⁶⁾Libbys ursprünglicher Artikel [\[57\]](#) befasst sich nicht nur mit ^{14}C , sondern auch mit Tritium. In 1953 verwendete Libby das Letztere, um Wein zu datieren [\[58\]](#).