II.4.4 b Kernspin und Parität angeregter Zustände

Im Grundzustand besetzen die Nukleonen die niedrigsten Energieniveaus im Potentialtopf. Oberhalb liegen weitere Niveaus, auf welche die Nukleonen durch Energiezufuhr versetzt werden können: der Atomkern ist dann in einem angeregten Zustand.

Das hier dargelegte Ein-Teilchen-Schalenmodell liefert zuverlässige Voraussagen nur für den Fall eines ug- oder gu-Kerns mit im Grundzustand einem einzelnen Nukleon auf der angefangenen Schale, das auf die nächste Schale angeregt wird, während die abgeschlossenen Schalen ungestört bleiben. Dann bestimmt dieses Nukleon den Spin und die Parität des angeregten Kerns — sowie des Grundzustands, wie oben gesehen.
Zum Beispiel hat der erste angeregte Zustand des ${}^{17}_{8}\mathrm{O}$-Kerns Spin und Parität $J^{\mathsf{P}}_{\mathrm{Kern}}({}^{17}_{8}\mathrm{O}^*) = \frac{1}{2}^+$: das ungepaarte Neutron wird von der $1\mathrm{d}_{5/2}$ auf die $2\mathrm{s}_{1/2}$ versetzt.

II.4.4 c Elektrische Dipol- und Quadrupolmomente

Elektrisches Dipolmoment

Dem Schalenmodell nach besitzen Atomkerne eine definierte Parität unter Raumspiegelung, d.h. ihre Wellenfunktion ist Eigenzustand zum Paritätsoperator: $\hat{\mathsf{P}}\Psi_{\mathrm{Kern}}(\vec{r}) = \Psi_{\mathrm{Kern}}(-\vec{r}) = \pm\Psi_{\mathrm{Kern}}(\vec{r})$. Infolgedessen ist deren Ladungsdichteverteilung $\rho_{\mathrm{el.}}(\vec{r}) = Ze\,\Psi^*_{\mathrm{Kern}}(\vec{r})\Psi_{\mathrm{Kern}}(\vec{r})$ invariant unter der Transformation $\vec{r} \to -\vec{r}$.

Aus der Definition (I.28) des elektrischen Dipolmoments ergibt sich dann sofort[39] $\vec{D} = -\vec{D}$,

[39] Der Beweis folgt aus der mathematischen Substitution $\vec{r} \to -\vec{r}$ im Integral, das $\vec{D}$ definiert.

d.h. $\vec{D} = \vec{0}$: Kerne sollten kein elektrisches Dipolmoment haben, was experimentell bestätigt ist. Beispielsweise ist die obere experimentelle Grenze für den Wert des elektrischen Dipolmoments des Protons $|\vec{D}| < 0{,}54 \cdot 10^{-10}\, e\,\mathrm{fm}$ [28], während die „natürliche“ Größenordnung für eine Verteilung mit der Ausdehnung $\approx 1\,\mathrm{fm}$ und der Ladung e wäre $\approx 1\, e\,\mathrm{fm}$.

Elektrisches Quadrupolmoment

Das elektrische Quadrupolmoment charakterisiert die Abweichung der Ladungsverteilung von der Kugelgestalt (§ I.4.3). Bei kugelsymmetrischen Kernen soll daher dieses Moment verschwinden, was experimentell bestätigt wird: gg-Kerne besitzen kein elektrisches Quadrupolmoment.

Für einen ug-Kern mit einer Protonenzahl Z um eins größer (bzw. kleiner) als eine magische Zahl sollte die zz-Komponente des elektrischen Quadrupolmoments $\mathcal{Q}_{zz}$ negativ (bzw. positiv) sein, weil das zusätzliche (bzw. fehlende) Proton die sonst kugelsymmetrische Ladungsverteilung in der äquatoriale Zone des Kerns vergrößert (bzw. verringert), wobei die z-Achse die Richtung des Kernspins ist. Dabei stellt die angenommene Unabhängigkeit der Nukleonen sicher, dass das zusätzliche bzw. fehlende Proton die durch die anderen Protonen erzeugte Ladungsverteilung nicht stört, sodass diese kugelsymmetrisch bleibt. Diese Vorhersage wird ebenfalls experimentell bestätigt, wie in Abb. II.9 gezeigt wurde.

Im Rahmen des Ein-Teilchen-Schalenmodells können auch die absoluten Werte des elektrischen Quadrupolmoments berechnet werden, indem man die mithilfe der Nukleonwellenfunktionen gebildete Wellenfunktion des Kerns in Gl. (I.29) einsetzt. Die so berechneten $|\mathcal{Q}_{zz}|$-Werte sind aber meist erheblich niedriger als die gemessenen Werte, d.h. die Verformungen der Kerne sind größer, als was im Modell gefunden wird. Dies ist leicht verständlich, denn das hier hergeleitete Modell beruht eigentlich auf den Ansatz sphärischer Kerne, sodass Abweichungen von der Kugelsymmetrie natürlich nicht gut können beschrieben werden. Eine zufriedenstellende Beschreibung deformierter Kerne erfordert von Anfang an die Nutzung eines mittleren Potentials ohne sphärische Symmetrie, wie im *Nilsson-Modell* des Kerns.[40]

Dem Einteilchen-Schalenmodell nach sollten alle gu-Kerne kein elektrisches Quadrupolmoment haben, weil ihre Protonen zu einem verschwindenden Gesamtdrehimpuls koppeln, d.h. kugelsymmetrisch verteilt sind, während die Neutronen keine elektrische Ladung besitzen, und daher zum elektrischen Quadrupolmoment nicht beitragen sollten. Tatsächlich haben aber die gu-Kerne $\mathcal{Q}_{zz} \neq 0$: die Annahme, dass die sphärische Verteilung der Protonen durch die asymmetrische Neutronenverteilung nicht gestört wird, wird durch das Experiment nicht bestätigt. Hier handelt es sich noch um einen Effekt der vernachlässigten Zwei-Teilchen-Restwechselwirkungen, und zwar hier von Proton-Neutron-Kräften.

Bemerkung: In Abb. II.9 sind besonders große elektrische Quadrupolmomente $\mathcal{Q}_{zz} > 1\, e\,\mathrm{barn}$ bei Atomkernen mit $63 \leq Z \leq 75$ zu sehen, die Massenzahlen $150 \lesssim A \lesssim 190$ entsprechen. Diese stark deformierten Kerne sind genau diejenigen, bei denen Spin und Parität von den im Rahmen des Ein-Teilchen-Schalenmodells vorhergesagten Werten abweichen. Dies ist natürlich kein Zufall: die Beschreibung eines deformierten Kerns erfordert ein ebenfalls deformiertes mittleres Potential, somit sind die nutzbaren Quantenzahlen diejenigen, die mit den Projektionen des Nukleonbahndrehimpulses und -Spins auf die Symmetrieachse des Potentials assoziiert sind.

II.4.4 d Magnetisches Dipolmoment

Das Ein-Teilchen-Schalenmodell beruht auf der Annahme, dass die Nukleonen im Atomkern unabhängig voneinander sind. Infolgedessen wird das magnetische Dipolmoment $\vec{\mu}_{\mathrm{Kern}}$ des Kerns einfach durch die Summe der Dipolmomente $\vec{\mu}$ der Nukleonen gegeben.

Magnetisches Dipolmoment eines einzelnen Nukleons im Kern

Daher kann man zuerst das magnetische Dipolmoment $\vec{\mu}$ eines einzelnen Nukleons betrachten.

[40] Vgl. in Ref. [43] ein Beispiel für ein deformiertes Potential.

Zwei Drehimpulse tragen zu $\vec{\mu}$ bei, und zwar der Bahndrehimpuls des Nukleons und sein Spin (§ I.4.3 b):

$$\hat{\vec{\mu}} = \hat{\vec{\mu}}_L + \hat{\vec{\mu}}_S = \mu_N \frac{g_L \hat{\vec{L}} + g_S \hat{\vec{S}}}{\hbar}, \tag{II.33}$$

wobei die Landé-Faktoren g_L und g_S vom Typ des Nukleons abhängen.

Gleichung (II.33) lässt sich sofort als

$$\hat{\vec{\mu}} = \frac{\mu_N}{2\hbar}\Big[(g_L + g_S)(\hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}) + (g_L - g_S)(\hat{\vec{L}} - \hat{\vec{S}})\Big]$$

umschreiben. Das Skalarprodukt mit $\hat{\vec{J}}$ lautet dann

$$\hat{\vec{\mu}} \cdot \hat{\vec{J}} = \frac{\mu_N}{2\hbar}\Big[(g_L + g_S)\hat{\vec{J}}^2 + (g_L - g_S)(\hat{\vec{L}}^2 - \hat{\vec{S}}^2)\Big].$$

Wie oben gesehen sind $\hat{\vec{L}}^2$, $\hat{\vec{S}}^2$ und $\hat{\vec{J}}^2$ kommutierende Observablen, deren Erwartungswerte den Zustand des Nukleons charakterisieren. Es ergibt sich einfach:

$$\langle \hat{\vec{\mu}} \cdot \hat{\vec{J}} \rangle = \frac{\mu_N}{2}\big[(g_L + g_S)j(j+1) + (g_L - g_S)(\ell - s)(\ell + s + 1)\big]\hbar, \tag{II.34}$$

wobei die Identität $\ell(\ell+1) - s(s+1) = (\ell - s)(\ell + s + 1)$ benutzt wurde.

Magnetisches Dipolmoment des gesamten Kern

Mithilfe der Ergebnisse für ein einzelnes Nukleon kann die durch Gl. (I.33) gegebene Projektion des magnetischen Dipolmoments des Kerns auf seinen Spin sofort berechnet werden:

- Bei gg-Kernen verschwindet der Kernspin J_{Kern}, sodass $\mu_{\text{Kern}} = 0$.
- Bei ug- und gu-Kernen bestimmt das ungepaarte Nukleon das gesamte magnetische Dipolmoment des Kerns, denn die anderen Nukleonen koppeln zum Gesamtdrehimpuls $J = 0$ und folglich $\mu = 0$. Dann ist das Dipolmoment des Nukleons durch Gl. (II.33) gegeben, mit
  - für ein ungepaartes Proton: $\begin{cases} \vec{\mu}_L = \mu_N \dfrac{\vec{L}}{\hbar} & \text{d.h. } g_L = 1; \\ \vec{\mu}_S = g_S \mu_N \dfrac{\vec{S}}{\hbar} & \text{wobei } g_S = 5,59. \end{cases}$
  - für ein ungepaartes Neutron: $\begin{cases} \vec{\mu}_L = \vec{0} & \text{d.h. } g_L = 0 \text{ (keine elektrische Ladung!)}; \\ \vec{\mu}_S = g_S \mu_N \dfrac{\vec{S}}{\hbar} & \text{mit } g_S = -3,83. \end{cases}$

  Der Vergleich zwischen der praktischen Definition (I.33) des magnetischen Dipolmoments des Kerns und Gl. (II.34) gibt dann für einen Atomkern mit einem ungepaarten Nukleon auf der (n, ℓ, j)-Schale:

  $$\mu_{\text{Kern}} = \mu_N \left[\frac{1}{2}(g_L + g_S)j + \frac{1}{2}(g_L - g_S)\frac{(\ell - s)(\ell + s + 1)}{j + 1}\right]. \tag{II.35}$$

  Für ein Nukleon gilt $s = \frac{1}{2}$, sodass $j = \ell \pm \frac{1}{2}$. Gleichung (II.35) gibt also zwei Möglichkeiten für jeden Nukleonentyp:

  Fall A: $j = \ell + \frac{1}{2}$ (Bahndrehimpuls und Spin des Nukleons sind parallel)

  $$\mu_{\text{Kern}} = \mu_N \left[\frac{1}{2}(g_L + g_S)j + \frac{1}{2}(g_L - g_S)(j - 1)\right] = \mu_N \left[g_L j - \frac{1}{2}(g_L - g_S)\right]; \tag{II.36}$$

  Fall B: $j = \ell - \frac{1}{2}$ (Bahndrehimpuls und Spin des Nukleons sind antiparallel)

  $$\mu_{\text{Kern}} = \mu_N \left[\frac{1}{2}(g_L + g_S)j + \frac{1}{2}(g_L - g_S)\frac{j(j+2)}{j+1}\right] = \mu_N \left[g_L j + \frac{1}{2}(g_L - g_S)\frac{j}{j+1}\right] \tag{II.37}$$

Mit den jeweiligen Landé-Faktoren des Protons bzw. des Neutrons führen Gl. (II.36) und (II.37) zu den sog. *Schmidt-Linien* [in der $(j - \mu_{\rm Kern})$-Ebene] für das magnetische Moment eines Kerns mit einem ungepaarten Proton bzw. Neutron:

– ug-Kern:
$$\mu_{\rm Kern} = \begin{cases} \mu_N(j+2,29) & \text{für } j = \ell + \frac{1}{2}, \\ \mu_N\left(j - 2,29\dfrac{j}{j+1}\right) & \text{für } j = \ell - \frac{1}{2}; \end{cases} \tag{II.38a}$$

– gu-Kern:
$$\mu_{\rm Kern} = \begin{cases} -1,91\mu_N & \text{für } j = \ell + \frac{1}{2}, \\ +1,91\dfrac{j}{j+1}\mu_N & \text{für } j = \ell - \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{II.38b}$$

Experimentell liegen die magnetischen Dipolmomente praktisch aller ug- bzw. gu-Kerne zwischen den durch Gl. (II.38a) bzw. (II.38b) definierten Schmidt-Linien, d.h. das Schalenmodell ist relativ erfolgreich. Da die Dipolmomente aber nicht genau auf den Linien liegen, ist es nur ein Teilerfolg.

Bei näherer Betrachtung liegt die große Mehrheit der gemessenen magnetischen Dipolmomente für Kerne mit einem gegebenen Gesamtdrehimpuls j zwischen einerseits der durch Gl. (II.38) gegebenen relevanten Schmidt-Linie und andererseits der analogen Linie, die sich durch das Ersetzen des anomalen Landé-Faktors g_S des Nukleons durch $g_S = 2$, entsprechend dem erwarteten Wert für ein Elementarteilchen, ergibt. Im Fall der ug-Kerne mit $j = \ell + \frac{1}{2}$ heißt das zum Beispiel, dass die gemessenen $\mu_{\rm Kern}$ zwischen den Linien $\mu_N(j+2,29)$ und $\mu_N(j+0,5)$ liegen.

- Das Einteilchen-Schalenmodell liefert keine Voraussage für das magnetische Dipolmoment der uu-Kerne.

II.4.4 e Insel der Stabilität

Jenseits der beobachteten maximalen magischen Neutronen- bzw. Protonenzahlen $N = 126$ bzw. $Z = 82$ sagen Modelle die Existenz weitere solche Zahlen vorher: 184 wäre die nächste magische Neutronenzahl und 114, 120 oder 126 die nächste magische Protonenzahl (der Wert hängt vom benutzten Modell), vgl. Abb. II.13. Atomkerne mit einer solchen Zahl hätten dann ähnliche Eigenschaften, wie bei Kernen mit einer kleineren magischen Zahl gemessen werden.

Insbesondere wären solche Kerne erheblich mehr stabil, als ihre unmittelbare Nachbarn. Da alle bekannten Nuklide schwerer als ^{208}Pb unstabil sind, heißt diese erhöhte Stabilität Kerne mit einer größeren mittleren Lebensdauer bzw. Halbwertszeit, oder sogar neue schwere stabile Kerne.

Diese mögliche „Insel“ von stabilen Kernen innerhalb des „Meers der Instabilität“ wird aktiv untersucht: Mithilfe Kollisionen von schweren Kernen wird versucht, neue superschwere Kerne zu erzeugen. Neue Elemente (Ende 2014, bis zur Massenzahl $Z = 118$) werden tatsächlich erzeugt, bisher wurde aber kein eindeutiger Hinweis einer erhöhten Stabilität beobachtet. (Ein Übersicht über diese Experimente und deren Ergebnisse ist in Ref. [53] zu finden).

II.4.5 Stärken und Mängel des Einteilchen-Schalenmodells des Atomkerns

+ Diskussion über mittlere freie Weglänge eines Nukleons im Kern [54]