

II.3 Atomkern als ideales Fermi-Gas

In diesem Abschnitt und dem folgenden wird die quantenmechanische Natur der einen Atomkern bildenden Nukleonen genauer berücksichtigt als im Tröpfchenmodell. Zu diesem Zweck wird ein Kern als eine Menge von in einem Potentialtopf eingeschlossenen Protonen und Neutronen beschrieben.

Die zugrunde liegende Idee der Modelle ist, dass die Wirkung aller anderen Nukleonen auf ein beliebiges Nukleon sich effektiv zu einem „mittleren“ Potential mitteln lässt, welches das Nukleon in einem kleinen Raumbereich — entsprechend dem Kernvolumen — einsperrt und identisch für alle Nukleonen ist. Löst man das quantenmechanische Problem eines Teilchens im mittleren Potential, so findet man verschiedene gebundene Ein-Teilchen-Zustände auf sukzessiven Energieniveaus, die das Nukleon besetzen kann. Ein den Atomkern darstellender Viel-Teilchen-Zustand ergibt sich dann, indem die A Nukleonen auf solche Ein-Teilchen-Zustände verteilt werden. Dabei soll der Spin $\frac{1}{2}$ der Protonen und Neutronen — die somit sog. *Fermionen* sind — berücksichtigt werden: wenn mehrere davon sich im Potentialtopf befinden, gehorchen sie dem Pauli-Prinzip, sodass jeder verfügbare quantenmechanische Ein-Teilchen-Zustand von maximal nur einem Proton bzw. Neutron besetzt werden darf.

Im Fermi-Gas-Modell verzichtet man auf das exakte Spektrum der gebundenen Energieniveaus. Stattdessen verwendet man eine statistische Beschreibung — die eigentlich nur im Fall einer unendlichen Zahl von Teilchen begründet ist — und betrachtet man die im Potentialtopf eingeschlossenen Protonen und Neutronen als ein quantenmechanisches „Gas“, wobei die letztere Bezeichnung bedeutet, dass die Wechselwirkungen zwischen den im Potential eingeschlossenen Teilchen klein⁽²⁵⁾ sind. Da es sich bei dem Gas um Fermionen handelt, spricht man von einem *Fermi-Gas* (§ II.3.1). Hiernach wird der Atomkern zunächst als ideales Fermi-Gas aus Nukleonen (§ II.3.2), dann als ideale Mischung zwei idealer Fermi-Gase aus Protonen und Neutronen (§ II.3.3) beschrieben. Durch diesen Ansatz lassen sich einige Eigenschaften des Atomkerns erklären, wie hiernach am Beispiel der in der Bethe–Weizsäcker-Massenformel phänomenologisch eingeführten Asymmetrie-Energie illustriert wird.

II.3.1 Ideales Fermi-Gas

Im Folgenden werden die elementaren Grundlagen der Theorie des idealen quantenmechanischen Fermi-Gases bei Null-Temperatur kurz dargelegt. Ausführlichere Darstellungen sind in Lehrbüchern der Statistischen Physik zu finden, z.B. in Refs. [36, 37].

Eine Menge aus \mathcal{N} nicht-wechselwirkenden Teilchen — ein ideales Gas — sei in einem räumlichen Volumen \mathcal{V} eingeschlossen, z.B. durch das Kastenpotential $V(\vec{r}) = 0$ wenn $\vec{r} \in \mathcal{V}$, $V(\vec{r}) = \infty$ sonst. Für große Volumina wird der Abstand zwischen sukzessiven Energieniveaus sehr gering und man kann annehmen, dass die Niveaus ein fast kontinuierliches Spektrum bilden. Genauer ergibt sich, dass die Anzahl von Teilchen mit Impuls zwischen \vec{p} und $\vec{p} + d^3\vec{p}$ durch

$$d\mathcal{N}(\varepsilon_{\vec{p}}) = g f(\varepsilon_{\vec{p}}) \frac{\mathcal{V} d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} \quad (\text{II.6})$$

gegeben ist, wobei $\varepsilon_{\vec{p}}$ die dem Impuls \vec{p} zugehörige Energie ist: für nicht-relativistische Teilchen mit der Masse m , $\varepsilon_{\vec{p}} = \vec{p}^2/2m$, wobei die Massenenergie weggelassen wurde. g ist der *Entartungsgrad* der Teilchen, d.h. die Zahl von unabhängigen (inneren) Freiheitsgraden einer bestimmten Teilchenart: für Teilchen mit dem Spin s gilt üblicherweise $g = 2s + 1$, entsprechend der Anzahl der möglichen Werte von m_s ⁽²⁶⁾

Schließlich bezeichnet $f(\varepsilon)$ die mittlere Besetzungszahl eines Zustands mit der Energie ε . Die funktionale Form von $f(\varepsilon)$ hängt von der Teilchenart ab, und zwar davon, ob die Teilchen einen ganzzahligen (Boson) oder halbzahligen (Fermionen) Spin haben. Hiernach werden nur Protonen und Neutronen, also Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen, betrachtet. Daher kann ein Zustand laut dem Ausschließungsprinzip durch maximal ein Teilchen besetzt werden: die Besetzungszahl eines Zustands ist entweder

⁽²⁵⁾ Genauer soll die mit diesen Wechselwirkungen assoziierte potentielle Energie klein gegenüber die kinetische Energie der Teilchen sein.

⁽²⁶⁾ Es gibt aber wichtige Ausnahmen zu dieser Regel, wie z.B. bei Photonen, die in nur $g = 2$ Polarisationszuständen vorkommen können, obwohl sie Teilchen mit dem Spin 1 sind.

0 und 1, und die genaue mittlere Besetzungszahl hängt von der Temperatur ab. Hiernach wird angenommen, dass das die Nukleonen ein ideales Fermi-Gas bei Temperatur Null bilden, was sich im Nachhinein prüfen lässt. In diesem Fall ist

$$f(\varepsilon) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_F, \\ 0 & \text{für } \varepsilon > \varepsilon_F, \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

wobei ε_F die sog. *Fermi-Energie* ist, die somit die Energie des höchsten besetzten Niveaus ist, während tiefere Energieniveaus voll besetzt sind.

Integriert man Gl. (II.6) über Energien ε von 0 bis ∞ , so soll man die Gesamtzahl von Teilchen \mathcal{N} erhalten. Äquivalent kann man über alle Impulse $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$ integrieren. Da die Besetzungszahl nur von $\varepsilon_{\vec{p}}$ und dadurch vom Betrag $p \equiv |\vec{p}|$ abhängt, sind sphärische Koordinaten im Impulsraum für das Integral günstig. Dabei kann man sofort über die Winkeln, die keine Rolle spielen, integrieren, und somit $d^3\vec{p}$ durch $4\pi p^2 dp$ ersetzen, wobei p von 0 bis ∞ läuft. Assoziiert man der Fermi-Energie einen *Fermi-Impuls* p_F , so kann man die obere Grenze des Integrals durch p_F , denn die Niveaus mit höherem Impuls sind bei Null-Temperatur unbesetzt. Somit ergibt sich

$$\mathcal{N} = \int_0^\infty g f(\varepsilon_{\vec{p}}) \frac{\mathcal{V} 4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{g\mathcal{V}}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p_F} 4\pi p^2 dp = \frac{g\mathcal{V}}{6\pi^2\hbar^3} p_F^3. \quad (\text{II.8})$$

II.3.2 Der Kern als Einkomponenten-Fermi-Gas von Nukleonen

In diesem und im nächsten Abschnitt wird der Atomkern als ideales Fermi-Gas modelliert, d.h. die Kräfte zwischen den Nukleonen werden ignoriert — genauer besteht die einzige Rolle der Wechselwirkungen darin, den Potentialtopf zu erzeugen; im Potential wechselwirken die Nukleonen nicht mehr miteinander.

Die Beschreibung des Kerns als Gas von voneinander unabhängigen Teilchen kann wegen des kleinen Abstands zwischen Nukleonen und der entsprechenden starken Nukleon–Nukleon Wechselwirkung zwar überraschend wirken. Im Grundzustand des Kerns sind aber alle niedrigsten Zustände im Potentialtopf durch die Nukleonen besetzt, sodass irgendeine Streuung zwischen Nukleonen kaum stattfinden kann: die in der Kollision beteiligten Nukleonen können nämlich nach dem Stoß keine vorhandene freie Zustände finden, was effektiv die Streuung verhindert. Deshalb liefert eine wechselwirkungsfreie Beschreibung eine ziemlich gute Approximation.

Der Unterschied zwischen Protonen und Neutronen kann in einem ersten Schritt vernachlässigt werden. In diesem Abschnitt wird somit ein ideales Gas aus zwei Fermionentypen mit je dem Spin $\frac{1}{2}$ und derselben Masse $m_p = m_n = m_N$, und ohne elektrische Ladung betrachtet. Der Entartungsgrad dieser Nukleonen ist somit $g = 4$, entsprechend 2 Spinzuständen für jede Teilchenart.

Verwendet man die Beziehung (II.8) mit auf der linken Seite der Nukleonenzahl im Kern A als Gesamtzahl von Teilchen und mit $g = 4$ und $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\text{Kern}}$, so ergibt sich

$$A = \frac{2}{3} \frac{\mathcal{V}_{\text{Kern}}}{\hbar^3 \pi^2} p_{F,N}^3, \quad (\text{II.9})$$

wobei $p_{F,N}$ den Fermi-Impuls für das Fermi-Gas aus Nukleonen bezeichnet. Daraus folgen sofort

$$p_{F,N} = (3\pi^2)^{1/3} \hbar \left(\frac{A}{2\mathcal{V}_{\text{Kern}}} \right)^{1/3} \quad (\text{II.10a})$$

$$\varepsilon_{F,N} = \frac{p_{F,N}^2}{2m_N} = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{2m_N} \left(\frac{A}{2\mathcal{V}_{\text{Kern}}} \right)^{2/3}, \quad (\text{II.10b})$$

mit $\varepsilon_{F,N}$ der Fermi-Energie des Nukleonen-Gases.

Mit dem Ansatz $\mathcal{V}_{\text{Kern}} = \frac{4}{3}\pi R_s^3 A$ für das Kernvolumen (vgl. § I.2.4 b) erhält man

$$p_{F,N} = \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3} \frac{\hbar}{R_s}, \quad \varepsilon_{F,N} = \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m_N R_s^2}. \quad (\text{II.11})$$

Mit dem Wert $R_s = 1,128 \text{ fm}$ für den äquivalenten Radius ergeben sich $p_{F,N} = 265 \text{ MeV}/c$ und $\varepsilon_{F,N} \simeq 40 \text{ MeV}$. Die bisher nicht spezifizierte Tiefe V_0 des dem Kern bildenden Potentialtopfs muss mindestens diesen Wert haben, damit die Nukleonen im Topf eingeschlossen bleiben. Bei β -stabilen Kernen ist die Separationsenergie für die Abspaltung eines Nukleons etwa $8\text{--}10 \text{ MeV}$ (§ I.3.3), so dass $V_0 \simeq 50 \text{ MeV}$ sein soll, wie schematisch in Abb. II.5 dargestellt wird.

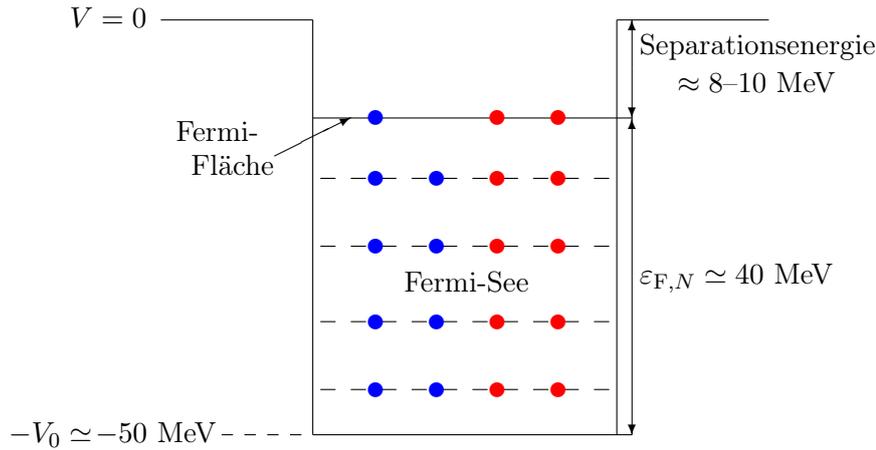


Abbildung II.5 – Schematisches Bild eines ug-Kerns als Einkomponenten-Fermi-Gas aus Nukleonen.

Bemerkungen:

* Man hätte auch die Nukleonendichte im Kern $A/\mathcal{V}_{\text{Kern}} \simeq n_\infty = 0,17 \text{ Nukleonen}/\text{fm}^3$ direkt in Gl. (II.10a) einsetzen können, um den Fermi-Impuls

$$p_{F,N} = \left(\frac{3\pi^2}{2}\right)^{1/3} \hbar n_\infty^{1/3}$$

dadurch auszudrücken und zu berechnen.

* Wie zu erwarten war ist die Fermi-Energie der typischen Ordnung der Energien der Kernphysik. Definiert man über $k_B T_F \equiv \varepsilon_F$ eine *Fermi-Temperatur*, so ist diese für Atomkerne etwa $4,6 \cdot 10^{11} \text{ K}$. Somit sind übliche Temperaturen von 300 K oder sogar 3000 K viel kleiner als dieser Wert, was die Annahme eines Fermi-Gases bei Null-Temperatur rechtfertigt.

Die gesamte kinetische Energie der A Nukleonen im Kern ist ⁽²⁷⁾

$$E_N = \int \varepsilon d\mathcal{N}(\varepsilon) = \int_0^{p_{F,N}} \frac{p^2}{2m_N} \frac{d\mathcal{N}}{dp} dp = \frac{3}{5} \frac{p_{F,N}^2}{2m_N} A = \frac{3}{5} \varepsilon_{F,N} A. \quad (\text{II.12})$$

Mit der oben berechneten Fermi-Energie ist die durchschnittliche kinetische Energie pro Nukleon unabhängig von der Nukleonenzahl: $E_N/A = \frac{3}{5} \varepsilon_{F,N} \simeq 24 \text{ MeV}$. Somit gilt $E_N/A \ll m_N c^2$: die Nukleonen sind also nicht relativistisch, was stillschweigend in der Herleitung angenommen wurde (z.B. in Gl. II.10b).

⁽²⁷⁾Die letzte Identität folgt aus $\frac{d\mathcal{N}}{dp} \propto p^2$ und $\int_0^{p_{F,N}} \frac{d\mathcal{N}}{dp} dp = A$.