

### I.3 Masse des Atomkerns

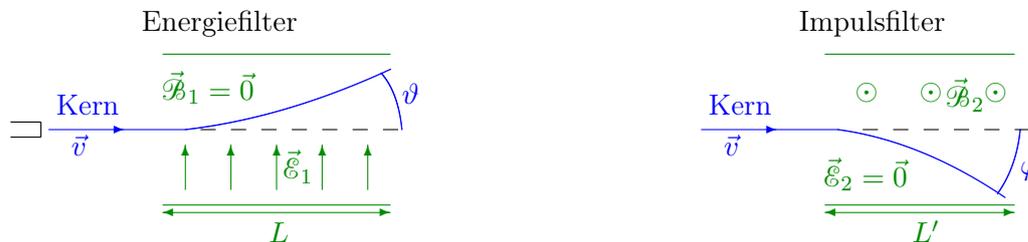
Eine zweite Grundeigenschaft von Atomkernen, neben ihrer Größe, ist ihre Masse, deren Messung für eine gegebene relative Genauigkeit in der Tat einfacher ist. Eigentlich spielt die Masse des Kerns schon eine Rolle in der Bestimmung des Radius, denn sie legt die reduzierte Masse für das äquivalente Ein-Körper-Problem für die Streuung eines Projektils am Kern fest. Dazu stellt sich die Masse als wichtig heraus, weil sie Auskunft über die Stabilität des Nuklids gibt.

**Bemerkung:** Hiernach bezeichnet  $m(Z, N)$  bzw.  $m(Z, A)$  die Masse der „nackten“ Atomkernen, d.h. von völlig ionisierten Atomen. In manchen Lehrbüchern wird an deren Stelle die Masse  $m'(Z, A)$  des Atoms, einschließlich der  $Z$  Elektronen, verwendet. Dies führt zu einigen Unterschieden, die im Folgenden rechtzeitig diskutiert werden.

### I.3.1 Grundlagen der Massenmessung

Die ersten Messungen der Masse des Atomkerns fanden parallel zu dessen Nachweis statt und führten schnell zur Entdeckung der Existenz von Isotopen (J. J. Thomson 1912) und zu ihrer systematischen Untersuchung (Aston 1919, vgl. Experiment 9 in Ref. [7]).

Die meisten frühen Methoden zur Massenbestimmung beruhen auf demselben einfachen Grundprinzip, das in mehreren Messapparaten — Massenspektrometer bzw. Massenspektrographen — implementiert wurden, insbesondere durch Mattauch.<sup>[11]</sup> Dabei fliegt der Kern durch zwei aufeinanderfolgende Filter, die seine kinetische Energie  $E_{\text{kin}}$  (Energiefilter) und seinen Impuls  $|\vec{p}|$  (Impulsfilter) präzise auswählen, wie unten schematisch dargestellt wird. Dann wird die Masse einfach durch  $m = |\vec{p}|^2 / 2E_{\text{kin}}$  — im nicht-relativistischen Fall — gegeben (vgl. Experiment 26 in Ref. [7]).



Der Ablenkwinkel  $\vartheta$  der Flugrichtung des Kerns (Ladung  $q$ ) am Ausgang des Gebiets (Länge  $L$ , gleichmäßiges elektrisches Feld  $\vec{E}_1$ , verschwindendes magnetisches Feld  $\vec{B}_1$ ) ist gegeben durch

$$\tan \vartheta = \frac{q\mathcal{E}_1 L}{mv^2} = \frac{\frac{1}{2}q\mathcal{E}_1 L}{E_{\text{kin}}}.$$

Der Ablenkwinkel  $\varphi$  am Ausgang des Gebiets (Länge  $L'$ , elektrisches Feld  $\vec{E}_2 = \vec{0}$ , gleichmäßiges magnetisches Feld  $\vec{B}_2$ ) ist gegeben durch

$$\sin \varphi = \frac{q\mathcal{B}_2 L'}{mv} = \frac{q\mathcal{B}_2 L'}{|\vec{p}|}.$$

Mit solchen Methoden werden relative Genauigkeiten von etwa  $10^{-4}$ – $10^{-5}$  erreicht. Genauere Messungen sind mit sog. *Flugzeitmassenspektrometern* nötig; dabei werden die Kerne in einem Bereich (Länge  $L$ ) durch eine konstante Spannung beschleunigt, und die Zeit zum Durchlaufen des Gebiets liefert das Masse-zu-Ladung-Verhältnis  $m/q$ .

Um eine noch höhere Genauigkeit zu erreichen sind andere Messmethoden nötig [22], wie z.B. die Verwendung einer Penning-Falle (vgl. Ref. [23] und das darin enthaltene Literaturverzeichnis).

### I.3.2 Bindungsenergie

Die Masse eines Nuklids mit  $A$  Nukleonen ist ungefähr proportional zu  $A$  — was die Bezeichnung „Massenzahl“ rechtfertigt —, entsprechend den fast gleichen Massen von Proton und Neutron (vgl. Abschn. I.5.2 und I.5.3).

Genauer ist die Masse  $m(Z, N)$  eines *gebundenen* Atomkerns mit  $Z$  Protonen und  $N$  Neutronen immer kleiner als die Summe der Massen seiner Bausteine:

$$m(Z, N) = Zm_p + Nm_n - \Delta m(Z, N), \quad (\text{I.21})$$

wobei  $m_p$  bzw.  $m_n$  die Masse des Protons bzw. Neutrons bezeichnet und  $\Delta m(Z, N) > 0$  der sog. *Massendefekt* ist. Indem die Neutronenzahl  $N$  durch  $A - Z$  ersetzt wird, erhält man die alternative

<sup>[11]</sup>Vgl. Ref. [21, Kap. 3] für einen Überblick über verschiedene Methoden und die entsprechenden Messapparate.

Schreibweise

$$m(Z, A) = Zm_p + (A - Z)m_n - \Delta m(Z, A). \quad (\text{I.22})$$

Ausgehend vom Massendefekt ist die *Bindungsenergie* des Kerns definiert durch

$$B(Z, A) \equiv \Delta m(Z, A) c^2. \quad (\text{I.23})$$

$B(Z, A)$  stellt die Energie dar, die freigesetzt wird, als die den Kern bildenden Nukleonen zu einem gebundenen Zustand „kondensieren“. Deshalb gewährt sie Einsicht in die Stabilität der aus Nukleonen bestehenden Zustände. Somit ist ein aus festen Protonen- bzw. Neutronenzahlen  $Z$  bzw.  $N = A - Z$  bestehender Zustand umso stabiler, je größer die zugehörige freigesetzte Energie  $B(Z, A)$  ist.

Sei z.B. angenommen, dass mehr Energie freigesetzt wird, wenn  $Z$  Protonen und  $N$  Neutronen die zwei Kerne  $(Z_1, N_1)$  und  $(Z_2 = Z - Z_1, N_2 = N - N_1)$  bilden, als wenn sie das einzige Nuklid  $(Z, N)$  bilden: dann ist  $m(Z_1, N_1) + m(Z_2, N_2) < m(Z, N)$ , d.h.  $B(Z_1, N_1) + B(Z_2, N_2)$  ist größer als  $B(Z, N)$ . Dementsprechend ist der Zerfall des größeren Nuklids  $(Z, N)$  in die zwei leichteren energetisch bevorzugt.

**Bemerkung:** Wenn man nicht die Kernmasse  $m(Z, A)$ , sondern die Atommasse  $m'(Z, A)$  betrachtet, dann tragen neben die Massen und Bindungsenergie der Nukleonen auch solche der Elektronen bei:

$$m'(Z, A) = Zm_p + (A - Z)m_n - \frac{B(Z, A)}{c^2} + Zm_e - \frac{B_e(Z, A)}{c^2}, \quad (\text{I.24})$$

mit  $m_e$  der Elektronenmasse und  $B_e(Z, A)$  der Bindungsenergie der Elektronenhülle.

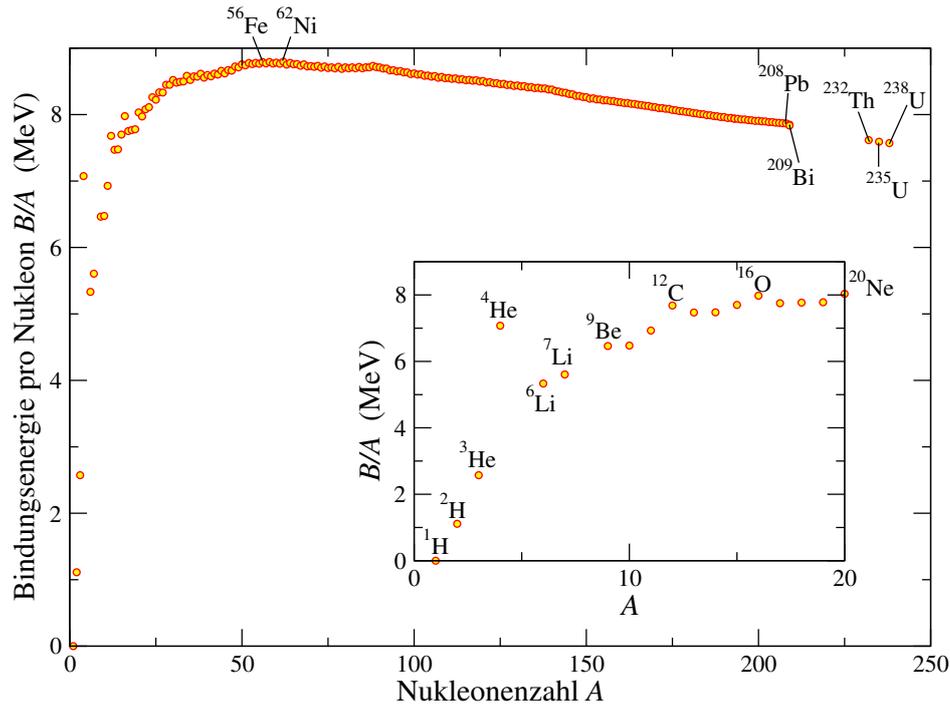
### Bindungsenergie pro Nukleon $B/A$

Viele Eigenschaften der bekannten Nuklide, insbesondere ihre Massen und Bindungsenergien pro Nukleon, werden in Ref. [24] zusammengestellt. In Abb. I.10 ist die Bindungsenergie pro Nukleon  $B(Z, A)/A$  gegen die Massenzahl  $A$  aufgetragen für verschiedene gegenüber  $\beta$ -Zerfall stabile Kerne. Genauer handelt es sich dabei um die Kerne mit der kleinsten Masse  $m(Z, A)$  — entsprechend in guter Näherung der größten  $B(Z, A)/A$  — in der zugehörigen Isobarenreihe, vgl. §???. Drei Haupteigenschaften tauchen auf:

- Die Größenordnung der Bindungsenergie pro Nukleon ist etwa 5–10 MeV, d.h.  $B(Z, A)$  beträgt ungefähr 0,5–1% der Kernmasse.  
Die typische Bindungsenergie ist somit um einen Faktor  $10^4$ – $10^6$  größer als in der Atomphysik, weshalb kernphysikalische Prozesse viel mehr Energie freisetzen können als chemische Reaktionen.
- Bei den leichten Kernen mit  $A < 10$  ist  $B(Z, A)/A$  annähernd proportional zu  $A - 1$  — bis auf einer bemerkenswerten Spitze bei  ${}^4_2\text{He}$ , entsprechend der besonderen Stabilität dieses Kerns.
- Andererseits bleibt die Bindungsenergie pro Nukleon näherungsweise konstant für  $A \geq 20$ :  $B/A \approx 7,5 - 8,5$  MeV.

Aus diesen Beobachtungen lassen sich wichtige Informationen über die Kernkräfte erhalten, die für die Kohäsion des Kerns verantwortlich sind. Insbesondere besitzen diese Kräfte eine *Sättigung*-Eigenschaft [25].

Den  $A$  Nukleonen entsprechen nämlich  $A(A - 1)/2$  Nukleon–Nukleon Paare, d.h. mutmaßlich  $A(A - 1)/2$  Nukleon–Nukleon Bindungen. Wenn die Erzeugung jeder dieser  $N$ – $N$ -Bindungen die gleiche Energie freisetzt, wächst die gesamte Bindungsenergie  $B(Z, A)$  linear mit deren Anzahl, d.h. sie ist annähernd proportional zu  $A^2$ . Das ist tatsächlich was bei Kernen mit wenigen Nukleonen beobachtet wird. Bei schwereren Atomkernen bindet sich aber jedes Nukleon nicht mit allen anderen, sondern nur mit einer kleinen Anzahl davon (möglicherweise mit nur einem einzelnen Partner), sodass  $B(Z, A)$  proportional zu  $A$  wird. Es sieht so aus, als ob die Bindungsfähigkeit des Nukleons nach ein paar Bindungen gesättigt wäre.



**Abbildung I.10** – Bindungsenergie pro Nukleon  $B/A$  verschiedener Kerne (Daten aus Ref. [24]). In jeder Isobarenreihe wird nur der gegenüber  $\beta$ -Zerfall stabile Kern mit der höchsten  $B/A$  dargestellt, vorausgesetzt seine mittlere Lebensdauer gegenüber  $\alpha$ -Zerfall bzw. spontane Spaltung größer als  $10^{15}$  s ist. (Zerfälle werden nur für  $^{209}\text{Bi}$ ,  $^{232}\text{Th}$ ,  $^{235}\text{U}$  und  $^{238}\text{U}$  beobachtet.)

Diese Sättigungseigenschaft erinnert an die analoge Eigenschaft der möglichen Bindungen eines chemischen Elements: z.B. kann ein Kohlenstoff-Atom nur vier Bindungen eingehen, weil es auf der Valenzschale vier ungepaarte Elektronen besitzt, die mit anderen Atomen können ausgetauscht werden. Analog kann aus der beobachteten Sättigung der Kernkräfte hergeleitet werden, dass diese Kräfte durch den Austausch eines Teilchens zwischen *zwei* Partnern vermittelt werden [25, 26]. Mehr später über Kernkräfte!

### I.3.3 Separationsenergien

Ausgehend von den Kernmassen wird die *Separationsenergie*  $S_n(Z, N)$  bzw.  $S_p(Z, N)$  für die Abspaltung eines Neutrons bzw. eines Protons definiert:

$$S_n(Z, N) \equiv [m(Z, N-1) + m_n - m(Z, N)]c^2, \quad (\text{I.25a})$$

$$S_p(Z, N) \equiv [m(Z-1, N) + m_p - m(Z, N)]c^2. \quad (\text{I.25b})$$

$S_n$  bzw.  $S_p$  ist die zu zuführende Energie, um ein Neutron bzw. ein Proton aus dem Kern freizusetzen: somit ist die Separationsenergie analog zur Ionisierungsenergie der Atome.

Eine positive Separationsenergie  $S_n$  bzw.  $S_p$  bedeutet, dass es energetisch günstiger ist, den Kern  $(Z, N)$  zu bilden, als den Zustand mit einerseits dem Nuklid  $(Z, N-1)$  bzw.  $(Z-1, N)$  und andererseits einem freien Neutron bzw. Proton. Umgekehrt ist ein Zustand mit negativer  $S_n$  bzw.  $S_p$  nicht gebunden und wird spontan ein Neutron bzw. ein Proton verlieren: in der  $(N-Z)$ -Ebene begrenzen die Linien  $S_n = 0$  und  $S_p = 0$  (die sog. Neutron- und Proton-*drip lines*) das Gebiet der gebundenen Zustände.

Die Separationsenergien (I.25) lassen sich durch die entsprechenden Bindungsenergien leicht ausdrücken:

### Aufgabe 12!

Analog zu den Separationsenergien  $S_n$ ,  $S_p$  definiert man die Separationsenergien  $S_\alpha$  für die Abspaltung eines  $\alpha$ -Teilchens, oder  $S_{2n}$  bzw.  $S_{2p}$  für die Abspaltung zweier Neutronen bzw. Protonen. Diesen Größen werden wir in Kap. ?? wieder begegnen.