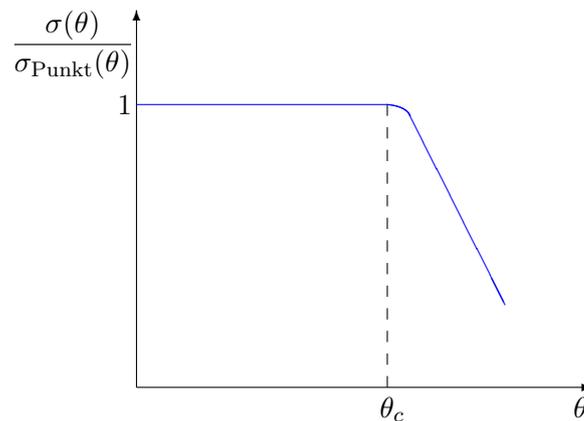


### I.2.3 Streuung an ausgedehnten Verteilungen

Die Beziehung (I.11) weist darauf hin, wie Information über die Ausdehnung des Atomkerns kann gewonnen werden. Somit kann man entweder Kerne mit kleinerer Ladungszahl  $Z = Q/e$  verwenden, um die Coulomb-Abstoßung zu verringern, oder Projektile mit höherer kinetischen Energie benutzen. In beiden Fällen kann das Projektil näher am Kern kommen und den Einfluss eines nicht-verschwindenden Radius spüren, woraus eine Abweichung von der Rutherford'schen Streuformel folgt.

Sei zunächst angenommen, dass die an Atomen gestreuten Projektile mit dem Atomkern nur elektromagnetisch wechselwirken. Im Nachhinein ist bekannt, dass dies nicht der Fall für  $\alpha$ -Teilchen ist, die auch mit dem Kern durch die starke Kernkraft wechselwirken. Im Gegensatz dazu unterliegen Elektronen nicht der starken Wechselwirkung, so dass ihre Streuung meistens durch die elektromagnetische Kraft verursacht wird.<sup>(6)</sup> Qualitativ gesehen wird das in den Kern eindringende Projektil

eine geringere elektrische Ladung spüren, als wenn der Kern punktförmig wäre, so dass es weniger abgestoßen bzw. gestreut ist. Somit kann man bei festem Streuwinkel  $\theta$  erwarten — vorausgesetzt dieser Winkel groß genug ist, damit der mit Gl. (I.13) berechnete entsprechende Wert des kleinsten Abstands des Projektils vom Streuzentrum  $r_{\min}(\theta)$  kleiner als der Kernradius ist —, dass der zugehörige differentielle Wirkungsquerschnitt  $d^2\sigma/d^2\Omega(\theta)$  vom Wert für Streuung an einem punktförmigen Ziel abweicht. Genauer sollte  $d^2\sigma/d^2\Omega(\theta)$  kleiner als für Stöße an Punktladungen sein: das Verhältnis des Wirkungsquerschnitts für Streuung an einer ausgedehnten Ladungsverteilung zum Wirkungsquerschnitt für Streuung an einer Punktladung sollte ab einem gewissen Wert von  $\theta$  kleiner als 1 werden, wie in Abb. I.7 schematisch dargestellt wird.



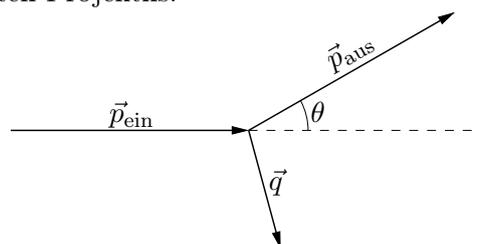
**Abbildung I.7** – Verhältnis des differentiellen Wirkungsquerschnitts [hier der Kurze halber als  $\sigma(\theta)$  bezeichnet] für Streuung an einer ausgedehnten Ladungsverteilung zu jenem für Streuung an einer Punktladung.

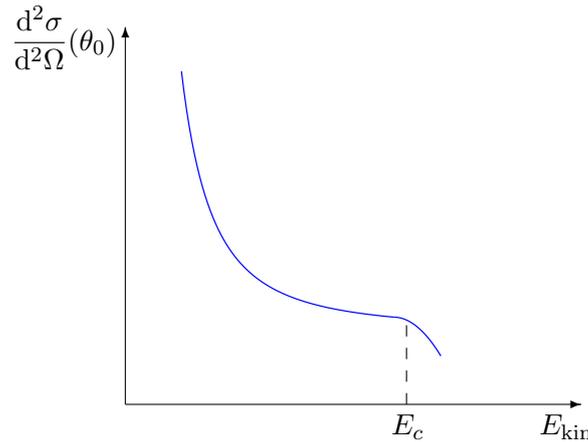
Eigentlich wurde ein solches Verhalten experimentell beobachtet, z.B. in Streuexperimenten mit  $\alpha$ -Teilchen mit  $E_{\text{kin}} = 22$  MeV an verschiedenen Kernen wie Gold ( $^{197}\text{Au}$ ) oder Blei ( $^{208}\text{Pb}$ ) [14]. Dabei wird das Verhältnis kleiner als 1 für  $\theta_c \simeq 90^\circ$ , entsprechend dank Gl. (I.11) und (I.13) einem kleinen Abstand der  $\alpha$ -Teilchen vom Kernzentrum von etwa 10 fm.

**Bemerkung:** Anstatt eine Abweichung von punktförmigen Fall ab einem gewissen Streuwinkel für feste kinetische Energie zu betrachten, kann man auch den Streuwinkel  $\theta_0$  festlegen und die kinetische Energie variieren lassen. Dann soll die Abweichung ab einem Wert  $E_c$  von  $E_{\text{kin}}$  auftreten. Genauer soll der differentielle Wirkungsquerschnitt  $d^2\sigma/d^2\Omega(\theta_0)$  für  $E_{\text{kin}} \leq E_c$  wie  $E_{\text{kin}}^{-2}$  skalieren, wie in Gl. (I.10b) zu sehen ist, während das Skalenverhalten für höhere kinetische Energien nicht mehr gilt (s. Abb. I.8). Aus dem Wert  $E_c$  der kinetischen Energie, für die das  $E_{\text{kin}}^{-2}$ -Skalieren verletzt wird, kann die Größe des Kernradius abgeschätzt werden.

### Elektrischer Formfaktor

Für eine mehr quantitative Beschreibung der Ausdehnung des Ziels sowie der zugehörigen Ladungsverteilung ist es zunächst günstig, den differentiellen Wirkungsquerschnitt durch den *Impulsübertrag* zu beschreiben. Dabei ist der Letztere durch  $\vec{q} \equiv \vec{p}_{\text{ein}} - \vec{p}_{\text{aus}}$  definiert, mit  $\vec{p}_{\text{ein}}$  bzw.  $\vec{p}_{\text{aus}}$  dem Impuls des einfallenden bzw. gestreuten Projektils:





**Abbildung I.8** – Verletzung des  $E_{\text{kin}}^{-2}$ -Skalierens des Rutherford'schen Wirkungsquerschnitts (I.10b) bei festem Streuwinkel  $\theta_0$ .

Im Fall einer elastischen Streuung gilt  $|\vec{p}_{\text{aus}}| = |\vec{p}_{\text{ein}}|$ , so dass  $|\vec{q}| = 2|\vec{p}_{\text{ein}}| \sin \frac{\theta}{2}$  — der Dreieck mit Seiten  $\vec{p}_{\text{ein}}$ ,  $\vec{p}_{\text{aus}}$  und  $\vec{q}$  ist nämlich gleichseitig.

Mithilfe der Gleichung  $E_{\text{kin}} = |\vec{p}_{\text{ein}}|^2/2m$  und der obigen Beziehung zwischen  $\vec{p}_{\text{ein}}$  und  $\vec{q}$  lässt sich die Rutherford'sche Streuformel (I.10b) leicht durch  $\vec{q}$  ausdrücken als

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega}(\vec{q}) = \left( \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{4m^2}{|\vec{q}|^4}. \quad (\text{I.14})$$

Allgemeiner kann man jeden differentiellen Wirkungsquerschnitt für die durch die Coulomb-Kraft vermittelte elastische Streuung an einem punktförmigen Streuzentrum durch den Impulsübertrag ausdrücken, egal, ob man relativistische oder quantenmechanische Effekte berücksichtigt. Sei  $d^2\sigma/d\Omega(\vec{q})|_{\text{Punkt}}$  dieser Wirkungsquerschnitt. Für die Streuung an ausgedehnten Zielen gilt

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega}(\vec{q}) = F^2(\vec{q}) \frac{d^2\sigma}{d^2\Omega}(\vec{q}) \Big|_{\text{Punkt}} \quad (\text{I.15})$$

wobei  $F^2(\vec{q})$  der *elektrische Formfaktor* des Ziels ist, der mit der im nächsten Paragraph diskutierten elektrischen Ladungsdichteverteilung  $\rho_{\text{el.}}(\vec{r})$  verknüpft ist:

$$F^2(\vec{q}) \equiv \left| \frac{1}{Q} \int \rho_{\text{el.}}(\vec{r}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar} d^3\vec{r} \right|^2. \quad (\text{I.16})$$

(Wenn ich Zeit finde, werde ich diese Formel weiter erklären. N.B.)

## I.2.4 Dichteverteilungen von Atomkernen

### I.2.4a Ladungsdichteverteilung

Zur Beschreibung eines ausgedehnten elektrisch geladenen Bereichs, insbesondere eines Atomkerns, ist mehr als seine Gesamtladung  $Q$  erforderlich. Die ganze nötige Information ist in der *elektrischen Ladungsdichteverteilung*  $\rho_{\text{el.}}(\vec{r})$  enthalten, die so definiert ist, dass das Produkt  $\rho_{\text{el.}}(\vec{r}) d^3\vec{r}$  die Ladung im Volumenelement  $d^3\vec{r}$  um den Punkt  $\vec{r}$  darstellt. Integriert über den ganzen Raum soll die Ladungsdichteverteilung die gesamte Ladung  $Q$  ergeben, entsprechend der Normierung

$$\int \rho_{\text{el.}}(\vec{r}) d^3\vec{r} = Q. \quad (\text{I.17})$$

Experimentell liefern differentielle Wirkungsquerschnitte nicht genau  $\rho_{\text{el.}}(\vec{r})$ , sondern das Betragsquadrat deren Fourier-Transformierten, Gl. (I.16). Solche Wirkungsquerschnitte für Streuungen verschiedener elektrisch geladener Projektile — insbesondere von Elektronen, die der starken

Wechselwirkung nicht unterliegen — an unterschiedlichen Atomkernen wurden sorgfältig gemessen.<sup>(7)</sup> woher sich die elektrischen Formfaktoren der Kerne durch Gl. (I.15) gewinnen lassen. Aus  $F^2(\vec{q})$  ergibt sich dann die Ladungsdichteverteilung jedes einzelnen Kerns.

Für „leichte“ Atomkerne mit Massenzahl  $A < 20$  lassen sich die so erhaltenen Ladungsdichteverteilungen in erster Näherung günstig mit Gaußsche Verteilungen

$$\rho_{\text{el.}}(\vec{r}) = \rho_0 \left( \frac{1}{\pi R^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-r^2/R^2} \quad (\text{I.18})$$

anpassen, wobei wie üblich  $r \equiv |\vec{r}|$ .

Für schwerere, nicht-deformierte (vgl. Bemerkung unten) Kerne mit  $A \geq 20$  und Ladung  $Ze$  liefert die in Abb. I.9 dargestellte *Woods-Saxon-Verteilung* (auch manchmal *Fermi-Verteilung* genannt)

$$\rho_{\text{el.}}(\vec{r}) = \frac{\rho_{\infty}(Z, A)}{1 + \exp\left(\frac{r - R_{1/2}}{\delta}\right)} \quad (\text{I.19})$$

eine sehr gute Näherung. Dabei hängen die Parameter wie folgt von Massen- und Ladungszahl ab.

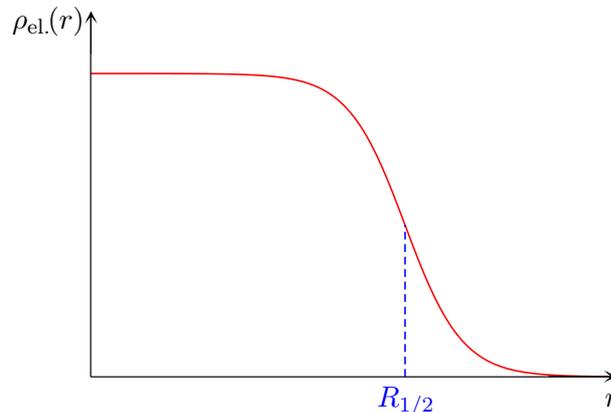


Abbildung I.9 – Verlauf einer Woods-Saxon-Verteilung (I.19).

- $\rho_{\infty}(Z, A) = 0,17 Ze/A \text{ C}\cdot\text{fm}^{-3}$  ist ungefähr gleich der Ladungsdichte im Zentrum des Kerns;
- die Dicke  $\delta$  der Randzone kann als unabhängig vom Kern angenommen werden,  $\delta = 0,545 \text{ fm}$ ;
- $R_{1/2}$ , entsprechend dem Abstand, wo die Hälfte der Ladungsdichte im Kernzentrum vorliegt, nimmt mit der Massenzahl  $A$  zu.

Eine nützliche Erfassung von Parametrisierungen der Ladungsdichteverteilungen verschiedener stabiler Atomkerne befindet sich in Ref. [16].

**Bemerkung:** Die oben angegebenen Gaußsche und Woods-Saxon-Ladungsdichteverteilungen beschreiben offensichtlich kugelsymmetrische Kerne, denn die Verteilungen hängen nur vom Abstand zum Kernzentrum  $r$  ab. Wie im später kommenden Abschnitt I.4.3 detaillierter diskutiert wird ist diese Annahme für den großen Teil der stabilen Kerne eine gute Näherung. Bei manchen sog. *deformierten* Kernen treten jedoch erhebliche Abweichungen von der Kugelsymmetrie auf, z.B. bei Uran. Dann ist ein Umdrehungsellipsoid eine bessere Approximation an der (durch die Ladungsverteilung dargestellten) Gestalt des Kerns.

<sup>(7)</sup> z.B. durch R. Hofstadter und seine Mitarbeiter; vgl. Experimente 19-20 in Ref. [7] sowie Ref. [15].

### I.2.4 b Kernradien

Aus Streuungen bei kleinen Impulsüberträgen  $|\vec{q}|$  lässt sich tatsächlich nur der quadratisch gemittelte („root mean square“ = rms) Radius gewinnen: (8)

$$R_{\text{rms}}^2 \equiv \frac{\int r^2 \rho(\vec{r}) d^3\vec{r}}{\int \rho(\vec{r}) d^3\vec{r}} \equiv \langle r^2 \rangle.$$

Oft gibt man anstatt  $R_{\text{rms}}$  den äquivalenten Radius  $R_e$  einer homogen geladenen Kugel mit demselben  $\langle r^2 \rangle$  an, d.h.  $R_e^2 = \frac{5}{3} R_{\text{rms}}^2$ . Experimentell gilt  $R_e \simeq r_0 A^{1/3}$  mit  $r_0 = 1,3 \pm 0,1$  fm.

Schließlich wird noch ein zusätzlicher Radius eingeführt:  $R_s$  ist der äquivalente Radius einer homogen geladenen Kugel, die überall die Ladungsdichte  $\rho_\infty(Z, A)$  hat, so dass  $Ze = \frac{4}{3}\pi R_s^3 \rho_\infty(Z, A)$ . Mit dem oben gegebenen experimentell gewonnenen Wert für  $\rho_\infty(Z, A)$  ist  $R_s = 1,128 A^{1/3}$  fm.

#### Bemerkungen:

\* Der Definition nach ist  $R_s$  genau proportional zu  $A^{1/3}$  für alle Atomkerne, während die entsprechende Proportionalität für  $R_{1/2}$  oder  $R_e$  nur annähernd ist.

\* Durch das Ersetzen von einem Elektron eines Atoms durch ein Myon — Elementarteilchen mit elektrischer Ladung  $-e$  und Masse  $m_\mu \simeq 207m_e$  — wird ein myonisches Atom erzeugt. Wegen seiner viel größeren Masse ist das Myon stärker gebunden am Kern als ein Elektron, sodass seine Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Inneren des Atomkerns groß wird. Beispielsweise beträgt der Bohrsche Radius der Myonenbahn um einen Blei-Kern etwa 3 fm, im Vergleich mit dem Kernradius  $R_s \simeq 7$  fm. Somit spürt das Myon während eines großen Teils seiner Bahn ein schwächeres Coulomb-Potential, als wenn der Kern punktförmig wäre, was seine Bindungsenergie verringert. Folglich liefert die Messung der Bindungsenergie des Myons eine Abschätzung des Kernradius [17] — oder genauer von  $R_{\text{rms}}$ .

### I.2.4 c Kerndichteverteilung

Der große Vorteil der Streuexperimente von Elektronen an Kernen besteht darin, dass dabei die einzige Wechselwirkung zwischen Projektil und Target elektromagnetischer Natur ist und somit gut bekannt. Andererseits sind solche Streuungen nur gegenüber die Verteilung der elektrisch geladenen Protonen empfindlich, liefern aber keine Auskunft über die Neutronen. (9)

Kollisionen von relativistischen Protonen mit kinetischer Energie  $E_{\text{kin}} \approx 1$  GeV ermöglichen jedoch die Messung der gesamten Teilchendichteverteilung im Kern unter Berücksichtigung der elektromagnetischen Kraft zwischen dem gestreuten Proton und denjenigen im Kern, deren Verteilung unabhängig durch Elektronenstreuung messbar ist [17]. Somit erhält man auch die Verteilung der Neutronen. Bei Kernen in der Nähe des  $\beta$ -Stabilitätlinie (s. Abschn. II.2.2 a) und einem geringen Neutronenüberschuss wird in guter Näherung kein Unterschied zwischen den Protonen- und Neutronenverteilungen beobachtet.

Anhand neuerer Methoden — Paritätsverletzende Elektronstreuung [18] oder die Photoerzeugung von  $\pi^0$ -Mesonen [19] — wurde eine kleine „neutron skin“, entsprechend einem größeren Radius für die Verteilung von Neutronen als für jene von Protonen, im neutronenreichen  $^{208}\text{Pb}$ -Atomkern beobachtet, wobei die Differenz der Radien je nach dem Experiment zwischen etwa 0.15 und 0.3 fm beträgt.

(8) Die Taylor-Entwicklung des Formfaktors (I.16) bei  $\vec{q} = \vec{0}$  gibt nämlich  $F^2(\vec{q}) = \left| 1 + i \frac{\vec{q} \cdot \langle \vec{r} \rangle}{\hbar} - \frac{\langle r^2 \rangle}{6\hbar^2} |\vec{q}|^2 + \dots \right|^2$ , wobei der lineare Term für eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung verschwindet.

(9) Eigentlich erzeugen die magnetischen Dipolmomente der Neutronen Dipolfeldpotentiale, deren Stärke aber viel kleiner ist, als jene des durch die Protonen erzeugten Coulomb-Potentials.

In Zusammenfassung ist die Nukleonendichte in einem nicht-deformierten Atomkern mit  $A \gtrsim 20$  in guter Näherung durch

$$n(\vec{r}) = \frac{n_\infty}{1 + \exp\left(\frac{r - R_{1/2}}{\delta}\right)} \quad (\text{I.20})$$

gegeben, wobei  $R_{1/2}$  mit der Massenzahl  $A$  zunimmt, während  $n_\infty$ , entsprechend ungefähr der Teilchendichte im Kernzentrum, unabhängig von  $A$  ist:  $n_\infty = 0,17$  Nukleon/fm<sup>3</sup>, was zum oben angegebenen Wert von  $\rho_\infty(Z, A)$  [s. unten Gl. (I.19)] führt.  $n_\infty$  wird *Sättigungsdichte* genannt.

**Bemerkung:** Da die Masse eines Nukleons etwa  $1,67 \cdot 10^{-27}$  kg beträgt, vgl. Abschn. I.5.2 und I.5.3, entspricht  $n_\infty$  einer Massendichte von  $2,8 \cdot 10^{17}$  kg·m<sup>-3</sup>.

### I.2.4 d Weitere Bemerkungen

In diesem Abschnitt wurden (beinahe) sphärische Atomkerne betrachtet, entsprechend der angenommenen Kugelsymmetrie der Dichteverteilungen (I.18), (I.19) oder (I.20), die nur von  $r = |\vec{r}|$  abhängen. Manche Nuklide sind aber „deformiert“, sogar im Grundzustand, was bedeutet, dass ihre Gestalt stark von derjenigen einer Kugel abweicht. Experimentell spiegeln sich solche Abweichungen von der Kugelsymmetrie in Momenten der Ladungsdichteverteilung wider (§ I.4.3 a).

Die oben beschriebene Methode zur Messung der (Ladungs-)Dichteverteilung eines Kerns mit Hilfe von Streuexperimenten beruht stillschweigend auf der Annahme, dass der zu messende Atomkern lange genug lebt, um als Ziel benutzt zu werden. Bei manchen Nukliden ist diese Annahme nicht erfüllt, insbesondere bei denjenigen, die in der Nähe der Grenzen des Stabilitätsbereichs liegen.

Solche Kerne, wenn sie sehr neutronenreich bzw. protonenreich sind, besitzen manchmal seltene Zerfallsarten durch die gleichzeitige Emission zweier Neutronen bzw. Protonen (§ III.3.5 a). Durch eine sorgfältige Analyse der gemessenen Kinematik der Zerfallsprodukte kann Information über die Struktur des zerfallenden Kerns gewonnen werden. Somit wurde bei einigen Kernen ungewöhnlich langreichweitige Dichteverteilungen entdeckt: dabei bewegen sich ein paar Neutronen bzw. Protonen im Mittel sehr weit vom Kernzentrum — sollte man schreiben, weit vom Kern des Atomkerns? — und bilden somit eine Art „Halo“ um den Rest der Nukleonen [20]. Beispiele solcher sog. *Halo-Kerne* sind  ${}^6_3\text{Li}$  (Halo aus zwei Neutronen) oder  ${}^8_5\text{B}$  (Halo aus einem einzelnen Proton).

In der Kernphysik sind Dichteverteilungen, wie die Wirkungsquerschnitte, statistische Größen, gewonnen aus der Wiederholung vieler identischer Experimente. Dementsprechend können sie als (unnormierte) Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen interpretiert werden: die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Nukleon im Volumenelement  $d^3\vec{r}$  um den Punkt  $\vec{r}$  befindet, ist proportional<sup>(10)</sup> zum Produkt  $n(\vec{r}) d^3\vec{r}$ , mit  $n$  der Nukleonendichteverteilung im Kern. In Übereinstimmung mit dieser Interpretation ist  $n(\vec{r})$  in quantenmechanischen Modellierungen des Atomkerns proportional zum Betragsquadrat der Wellenfunktion der  $A$  Nukleonen des Kerns.

Im Gegensatz ist die eigentliche Verteilung der Nukleonen in einem gegebenen Kern zu einem gegebenen Zeitpunkt nicht durch  $n(\vec{r})$  gegeben, sondern durch die Summe über alle Nukleonen von  $\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_i(t))$ -Termen, wobei  $\vec{r}_i(t)$  die Position zur Zeit  $t$  des  $i$ -ten Nukleons bezeichnet.

<sup>(10)</sup>Der Proportionalitätsfaktor ist einfach  $1/A$ , denn  $n(\vec{r})$  ist auf die Nukleonenzahl  $A$  des Kerns normiert.