

### **I.2.2 „Rutherford'sches“ Streuexperiment und Entdeckung des Atomkerns**

Ein wichtiges Beispiel von Anwendung der klassischen Streutheorie ist die elastische Streuung von elektrischen Punktladungen  $q$  mit Masse  $m$  an einem punktförmigen Ziel mit der elektrischen Ladung  $Q$  und einer sehr viel größeren Masse.

In diesem Fall herrscht zwischen den an den Stoß teilnehmenden Teilchen die elektromagnetische Wechselwirkung. Genauer unterliegen die Projektile der Coulomb-Kraft

$$\vec{F}_{\text{Coul}} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \quad (\text{I.7})$$

mit dem  $r$  Abstand zum Ziel und dem radialen Einheitsvektor  $\vec{e}_r$  in Richtung vom Ziel zum Projektil.

Unter Berücksichtigung der Erhaltungssätze — hier Energie und Drehimpuls — und Anwendung des Newtonschen Gesetzes findet man die Beziehung zwischen dem Stoßparameter  $b$  und dem Streuwinkel  $\theta$

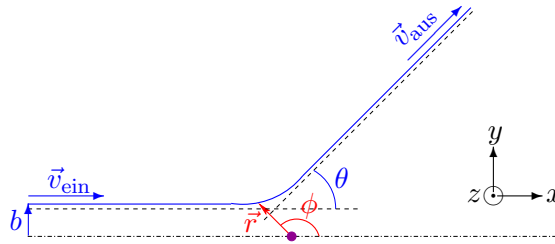
$$b(\theta) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0mv^2} \cot \frac{\theta}{2}, \quad (\text{I.8})$$

wobei  $v$  der Betrag der asymptotischen Geschwindigkeit des Projektils ist.

Sei  $\phi$  der (Polar-)Winkel zwischen der asymptotischen Flugrichtung des Projektils und  $\vec{e}_r$ . Die Position  $\vec{r}(t)$  des Projektils zur Zeit  $t$  wird von  $r$  und  $\phi$  charakterisiert und seine Geschwindigkeit lautet

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dr(t)}{dt} \vec{e}_r + r(t) \frac{d\phi(t)}{dt} \vec{e}_\phi,$$

wobei  $\vec{e}_\phi$  senkrecht auf  $\vec{e}_r$  ist (vgl. Abb. [I.4](#)).



**Abbildung I.4** – Koordinatensysteme für die Beschreibung der Streuung.

Im „Anfangszustand“ vor dem Streuprozess ( $t = -\infty$ ) ist das Projektil bei  $r = \infty$ ,  $\phi = \pi$ , mit Geschwindigkeit  $\vec{v}_{\text{ein}} = |\vec{v}_{\text{ein}}| \vec{e}_x$ . Im Endzustand ( $t = +\infty$ ) gelten  $r = \infty$ ,  $\phi = \theta$ , und  $\vec{v}_{\text{aus}} = |\vec{v}_{\text{aus}}| (\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y)$ .

Die Erhaltung der gesamten Energie  $\frac{1}{2}m\vec{v}_{\text{ein}}^2 = \frac{1}{2}m\vec{v}_{\text{aus}}^2$  — im Unendlichen verschwindet die Coulombsche potentielle Energie — gibt sofort  $|\vec{v}_{\text{ein}}| = |\vec{v}_{\text{aus}}| \equiv v$ .

Wiederum lautet der Bahndrehimpuls

$$\vec{L}(t) = m\vec{r}(t) \times \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = mr(t)^2 \frac{d\phi(t)}{dt} \vec{e}_z,$$

so dass seine Erhaltung zwischen dem Anfangszustand [ $\vec{L}(-\infty) = -mb|\vec{v}_{\text{ein}}| \vec{e}_z = -mbv \vec{e}_z$ ] und dem Zeitpunkt  $t$  führt zur Gleichung

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = -\frac{bv}{r(t)^2}. \quad (\text{I.9})$$

Dann lautet die Bewegungsgleichung  $m d^2\vec{r}/dt^2 = \vec{F}_{\text{Coul.}}$ . Nach Projektion auf die  $x$ -Achse kommt für die  $x$ -Komponente  $v_x(t)$  der Geschwindigkeit  $d\vec{r}(t)/dt$

$$\frac{dv_x(t)}{dt} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0mr(t)^2} \cos \phi(t).$$

Dividiert man diese Gleichung durch Gl. [\(I.9\)](#), so ergibt sich

$$\frac{dv_x}{d\phi} = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0mbv} \cos \phi,$$

d.h. die Bahnkurve wird nicht mehr durch die Zeit  $t$ , sondern durch den Polarwinkel  $\phi$  parametrisiert. Die Integration von  $\phi = \pi$ , entsprechend  $v_x = v$ , bis  $\phi = \theta$ , d.h.  $v_x = v \cos \theta$ , gibt

$$v(\cos \theta - 1) = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0mbv} \sin \theta,$$

d.h.

$$b = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0mv^2} \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta},$$

was unter Verwendung üblicher trigonometrischer Identitäten zur Gl. [\(I.8\)](#) führt.

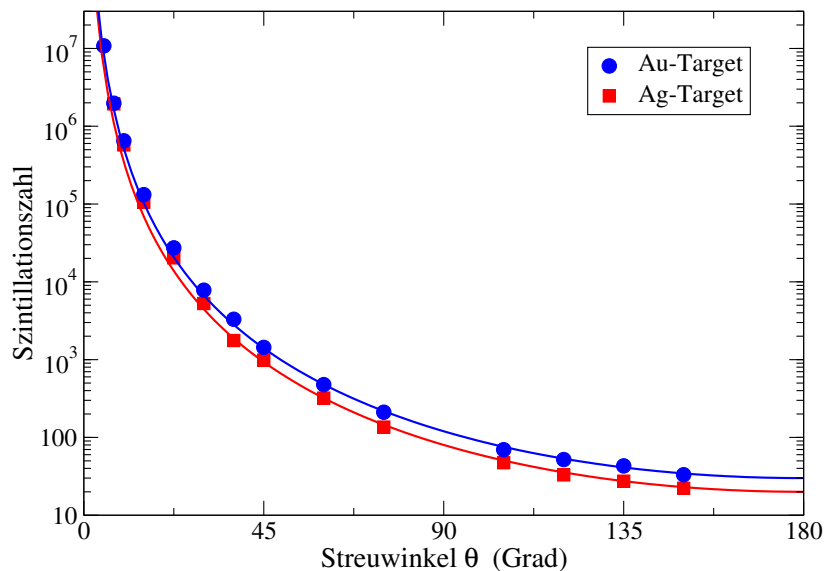
Nach Ableiten von  $b(\theta)$  [Gl. (I.8)] liefert Gl. (I.6) den differentiellen Wirkungsquerschnitt für das Problem und zwar

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega}(\theta, \varphi) = \frac{1}{16} \left( \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 \frac{1}{2}mv^2} \right)^2 \frac{1}{(\sin \frac{\theta}{2})^4}. \quad (\text{I.10a})$$

Führt man die kinetische Energie des Projektils  $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$  ein, so ergibt sich die sogenannte *Rutherford'sche Streuformel*

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega}(\theta, \varphi) = \frac{1}{16} \left( \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 E_{\text{kin}}} \right)^2 \frac{1}{(\sin \frac{\theta}{2})^4}. \quad (\text{I.10b})$$

Tatsächlich hat E. Rutherford diese Form des differentiellen Wirkungsquerschnitts benutzt, um die Ergebnisse von durch H. Geiger und E. Marsden durchgeführten Experimenten [12] zu interpretieren.<sup>(3)</sup> Die charakteristische  $(\sin \frac{\theta}{2})^{-4}$ -Abhängigkeit in Gl. (I.10b) stimmt nämlich mit der Verteilung des Streuwinkels gemessen in Streuung von  $\alpha$ -Teilchen — d.h.  ${}^4_2\text{He}$ -Kerne — an dünnen Gold- bzw. Silber-Folien überein, vgl. Abb. I.5.

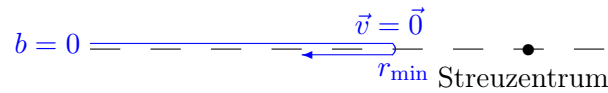


**Abbildung I.5** – Winkelverteilung elastisch gestreuter  $\alpha$ -Teilchen an Gold bzw. Silber, verglichen mit den entsprechenden Rutherford'schen Wirkungsquerschnitten, Gl. (I.10b).

Dabei hat Rutherford argumentiert, dass jedes  $\alpha$ -Teilchen dank der Dünne der Targets in den meisten Fällen nur an einem einzelnen Atom stößt. Somit wird „Vielfachstreuung“ vermieden, was die Modellierung vereinfacht. Der Stoß zwischen einem  $\alpha$ -Projektil und einem Gold- bzw. Silber-Atom wurde dann als elektromagnetische Streuung einer Punktladung  $q = ze$  mit  $z = 2$  an einer Punktladung  $Q = Ze$  mit  $Z = 79$  bzw.  $Z = 47$  modelliert, wobei  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  die Elementarladung ist. Dementsprechend sollte der Wirkungsquerschnitt (I.10b) für Stöße an Gold größer als für Stöße an Silber sein, was auch experimentell gefunden wurde.

Einfache Überlegungen liefern den kleinsten Abstand — bei gegebener kinetischer Energie des Projektils — zwischen Projektil und Streuzentrum in einem Stoß. Offensichtlich wird dieses Minimum für Stöße mit verschwindendem Stoßparameter  $b$  erreicht, d.h. wenn das Projektil direkt auf das Ziel fliegt. Die zugehörige Bahnkurve wird in Abb. I.6 dargestellt: indem das Projektil sich dem Streuzentrum nähert, wird es durch die Coulomb-Abstoßung abgebremst, bis seine Geschwindigkeit  $v_x$  null wird und ihr Zeichen ändert, was genau im Punkt des kleinsten Abstands  $r_{\text{min}}(b = 0)$  passiert. Danach fliegt das Projektil zurück, entsprechend einem Streuwinkel  $\theta = \pi$ .

<sup>(3)</sup>Die Experimente sind in Ref. [7] Experiment 6 beschrieben.



**Abbildung I.6** – Flugbahn eines Projektilteilchens mit Stoßparameter  $b = 0$ .

Drückt man die Energieerhaltung  $E_{\text{tot}} = E_{\text{Coul}}(r) + E_{\text{kin}}(r)$  für das Projektilteilchen aus, so ist die Gesamtenergie lange vor oder nach dem Stoß  $E_{\text{tot}} = E_{\text{kin}}(r = \infty)$  und im Punkt  $\vec{r}_{\text{min}}(b=0)$  des minimalen Abstands  $E_{\text{tot}} = E_{\text{Coul}}(r_{\text{min}}(b=0))$ . Unter Berücksichtigung der Form der potentiellen Energie im Coulomb-Feld  $E_{\text{Coul}}(r) = qQ/(4\pi\epsilon_0 r)$  kommt

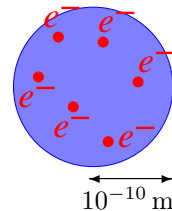
$$\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r_{\text{min}}(b=0)} = E_{\text{kin}}(r = \infty). \quad (\text{I.11})$$

Im Geiger–Marsden-Experiment galten  $q = 2e$ ,  $Q = 79e$  (für Streuung an Au-Atomen) und für die kinetische Energie der  $\alpha$ -Teilchen  $E_{\text{kin}}(\infty) = 7,7 \text{ MeV}$ . Diese Werte führen zu einer minimalen Entfernung  $r_{\text{min}}(b=0) \simeq 3 \cdot 10^{-14} \text{ m} = 30 \text{ fm}$ .<sup>(4)</sup>

Aus der Übereinstimmung zwischen den experimentellen Ergebnissen und seiner Modellierung konnte Rutherford schließen, dass positive Ladungsträger in Gold-Atomen sich in einem kleinen Bereich mit Radius kleiner als etwa 30 fm befinden. Dazu konzentriert sich fast die ganze Atommasse in diesem Bereich, dessen elektrische Ladung  $Ze$  genau gleich das Negative deren der  $Z$  Elektronen des Atoms ist. Anhand dieser Ergebnisse hat Rutherford sein planetarisches Atommodell vorgeschlagen [13], in welchem Atome aus einem kleinen positiv geladenen Kern und einer Elektronenhülle mit typischem Radius von etwa  $10^{-10} \text{ m}$  bestehen.

Die charakteristische Größe von Atomen ließ sich schon früher abschätzen. Laut dem Gesetz von Avogadro (1811) enthalten Gase bei gegebenen Drucken und Temperaturen in gleichen Volumina die gleiche Teilchenzahl. In 1865 konnte Loschmidt die Anzahl der in einer Volumeneinheit enthaltenen Molekülen — oder äquivalent die Loschmidt- / Avogadro-Zahl — ermitteln und somit für Atome eine Größenordnung von ca.  $10^{-10} \text{ m}$  berechnen.

Nach seiner Entdeckung des Elektrons (1897) schlug J. J. Thomson in 1904 sein „plum-pudding model“ des Atoms vor, in dem die Elektronen — ähnlich den Rosinen in einem Teig — sich in einem kontinuierlichen Medium positiver Ladung homogen verteilen, das so groß wie das ganze Atom ist. Die Masse eines solchen Atoms sammelt sich nicht in einem geringen Bereich, so dass das Modell durch die Geiger–Marsden-Experimente widerlegt war.



### Bemerkungen:

\* Die Rutherford-Streuformel (I.10b) lässt sich günstig mithilfe der elektromagnetischen Feinstrukturkonstante  $\alpha \equiv e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) \simeq 1/137$  umschreiben, indem die Ladungen  $q$  und  $Q$  durch  $ze$  und  $Ze$  ersetzt werden. Im System „natürlicher Einheiten“ der theoretischen Physik, in dem  $\hbar = c = 1$ , gilt somit

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega}(\theta, \varphi) = \frac{1}{16} \left( \frac{zZ\alpha}{E_{\text{kin}}} \right)^2 \frac{1}{(\sin \frac{\theta}{2})^4}.$$

\* Die Rutherford'sche Streuformel führt zu einem unendlichen totalen Wirkungsquerschnitt: für kleine Streuwinkel  $\theta$  ist  $\sin \frac{\theta}{2} \sim \frac{\theta}{2}$ , während  $d^2\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ , so dass das Integral in Gl. (I.5) wie  $\theta^{-2}$  divergiert. Der Grund dafür ist die „unendliche Reichweite“ des durch den isolierten Atomkern erzeugten Coulomb-Potentials.<sup>(5)</sup>

<sup>(4)</sup>Die für die Kernphysik günstigen Einheiten und ihr Zusammenhang zu denen des SI-Systems werden in Abschn. I.5.1 zusammengefasst.

<sup>(5)</sup>... was technisch bedeutet, dass  $rV(r)$  für  $r \rightarrow \infty$  nicht gegen Null geht.

In einem Atom schirmen die negativ geladenen Elektronen die positive Ladung des Kerns für Abstände größer als die typische Größe des Atoms ab. Diese Abschirmung des Potentials führt zu einer Änderung des differentiellen Wirkungsquerschnitts für kleine Streuwinkel, woraus  $d^2\sigma/d^2\Omega$  nicht mehr divergiert. Die entsprechende Änderung ist für übliche Energien in der Kernphysik vernachlässigbar.

Wiederum war die kinetische Energie der  $\alpha$ -Teilchen in den Geiger–Marsden-Experimenten hoch genug, damit die Teilchen tief in die Atome eindringen und die „nackten“ Atomkerne sehen konnten. Der kleinste Abstand  $r_{\min}(b)$  der Bahn des  $\alpha$ -Teilchens vom Kern beträgt nämlich

$$r_{\min}(b) = \frac{1}{2} \left[ r_{\min}(b=0) + \sqrt{r_{\min}(b=0)^2 + 4b^2} \right], \quad (\text{I.12})$$

wobei  $r_{\min}(b=0)$  durch Gl. (I.11) gegeben ist, kann wie folgt berechnet werden. Dabei kann der Stoßparameter durch den Streuwinkel ausgedrückt werden, vgl. Gl. (I.8), die sich leicht umschreiben lässt als  $b(\theta) = \frac{1}{2} r_{\min}(b=0) \cot \frac{\theta}{2}$ , woraus

$$r_{\min}(\theta) = \frac{1}{2} r_{\min}(b=0) \left( 1 + \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} \right) \quad (\text{I.13})$$

folgt. Auch für den kleinsten durch Geiger und Marsden gemessenen Streuwinkel ( $\theta = 5^\circ$ ) kommen  $\alpha$ -Teilchen weniger als 500 fm nah am Kern, d.h. tief ins Innere des Atoms.

Beweis der Beziehung (I.12):

folgt aus der Erhaltung des Bahndrehimpulses:  $L(\infty) = L(r_{\min})$ .

\* Die oben dargestellte Berechnung von Rutherford erfolgte im Rahmen der klassischen Mechanik. Im Nachhinein stellt sich die Frage, ob eine quantenmechanische Beschreibung des Streuprozesses nicht sinnvoller wäre. In diesem besonderen Fall ergibt jedoch eine solche Berechnung dank einigen Umständen dasselbe Ergebnis (in der „Bornschen Näherung“, d.h. in Störungsrechnung zur erster Ordnung) wie die klassische Beschreibung. Erstens war im historischen Rutherford'schen Streuexperiment die mit dem  $\alpha$ -Teilchen assoziierte Wellenlänge  $\lambda = \hbar c / \sqrt{2mE_{\text{kin}}}$  viel kleiner als der kleinste Abstand zwischen Projektil und Ziel: für  $E_{\text{kin}} = 7,7 \text{ MeV}$  ist  $\lambda \simeq 1 \text{ fm} \ll r_{\min}$ , so dass die „wellenartige“ Natur der Teilchen hier keine Rolle spielt. Dazu hat das  $\alpha$ -Teilchen den Spin 0: für die Streuung spinbehafteter Teilchen nimmt der Wirkungsquerschnitt eine (leicht) unterschiedliche Form an — obwohl der Unterschied noch für relativistische Projektile eine Rolle spielt.

Aus den Geiger–Marsden-Experimenten lässt sich nicht auf eine endliche Größe des Atomkerns schließen, da die Ergebnisse sich mit denen für Streuung an einem punktförmigen Ziel übereinstimmen. Somit ist nur bekannt, dass der Kernradius kleiner als der kleinste Abstand  $r_{\min}$  zwischen  $\alpha$ -Teilchen und Kernen ist.

<sup>(6)</sup>Eigentlich unterliegen Elektronen auch der schwachen Kernkraft, die hier aber vernachlässigbar gegenüber die elektromagnetische Wechselwirkung ist.