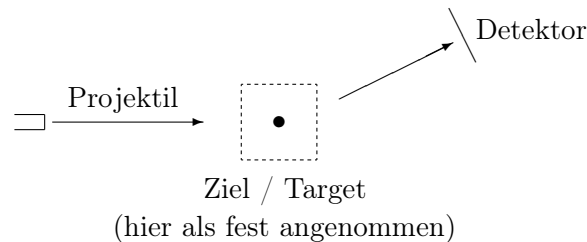


## I.2 Größe des Atomkerns

Zur experimentellen Messung der Größe eines Atomkerns werden meistens Streuexperimente durchgeführt: Dabei werden leichtere Projektilteilchen, deren Eigenschaften bekannt sind, an einem zu charakterisierenden Ziel (auch Target genannt) beschleunigt. Nach der Wechselwirkung zwischen Projektilen und Target werden die ersteren detektiert, wobei Informationen über das Target sowie über die eigentliche Art der Wechselwirkung können gewonnen werden.



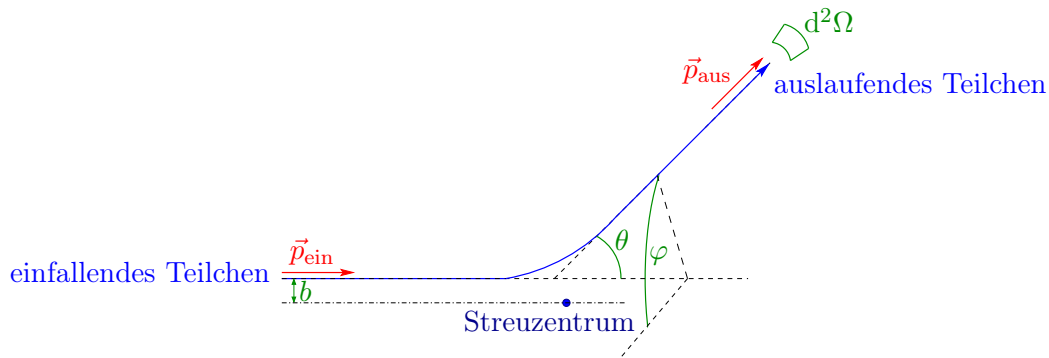
In diesem Abschnitt werden zunächst einige Begriffe und Ergebnisse der Streutheorie dargestellt, wobei die Diskussion auf eine klassische (d.h. nicht-quantenmechanische) Beschreibung beschränkt wird (Abschn. [I.2.1](#)). Diese Resultate werden in Abschn. [I.2.2](#) auf den Fall der Streuung an dem Coulomb-Potential, erzeugt durch eine punktförmige elektrische Ladung, entsprechend den Bedingungen des historischen Rutherford'schen Streuexperimentes. Die Verallgemeinerung des Formalismus auf die Streuung an ausgedehnten Zielen wird in Abschn. [I.2.3](#) diskutiert. Schließlich werden in Abschn. [I.2.4](#) die experimentell gewonnenen Ergebnisse zur Größe von Atomkernen vorgestellt.

### I.2.1 Klassische Streutheorie

Die Streuprozesse, die hiernach von Interesse sein werden, sind elastisch, d.h. die zwei Teilnehmer im Anfangszustand bleiben nach dem Stoß unverändert. Dazu wird das Potential, das die relevante Wechselwirkung vermittelt, nur vom Abstand zwischen den Teilchen abhängen. Bekannterweise lässt sich dann das Zwei-Körper-Problem nach Einführung der Relativkoordinate und der reduzierten Masse als Ein-Körper-Problem beschreiben, und zwar als die Streuung eines Teilchens an einem festen *Streuzentrum*. Im für das Folgende relevanten Fall ist das Zielteilchen — entsprechend dem zu untersuchenden Atomkern — viel schwerer als das Projektil, so dass die reduzierte Masse fast gleich der Masse des letzteren ist, während das Streuzentrum mit der Position des Atomkerns übereinstimmt.

#### I.2.1 a Definitionen

In der klassischen Mechanik folgt ein Teilchen in seiner Bewegung einer Bahnkurve, mit deren Hilfe einige charakteristischen Größen sich definieren lassen (vgl. Abb. [I.1](#)). Die asymptotischen Richtungen der Flugbahn vor dem Stoß („einfallendes Teilchen“ mit Impuls  $\vec{p}_{\text{ein}}$ ) und nach dem Stoß („auslaufendes Teilchen“ mit Impuls  $\vec{p}_{\text{aus}}$ ) definieren die *Streuebene*. Der Winkel  $\theta$  zwischen  $\vec{p}_{\text{ein}}$  und  $\vec{p}_{\text{aus}}$ , d.h. um den das einfallende Teilchen abgelenkt wird, heißt *Streuwinkel* oder auch *Ablenkwinkel*. Man sollte darauf aufpassen, dass der Streuwinkel vom Bezugssystem abhängt, in dem die Streuung untersucht wird.



**Abbildung I.1** – Darstellung einiger Größen zur Charakterisierung eines klassischen Streuprozesses.

Führt man eine Referenzrichtung senkrecht zur (experimentell bekannten!) Flugrichtung der einfallenden Teilchen ein, so wird der Impuls eines auslaufenden Teilchens neben  $\theta$  auch durch einen Azimutwinkel  $\varphi$  charakterisieren. Dann kennzeichnen  $\theta$  und  $\varphi$  die auslaufende Flugrichtung Teilchens vollständig. Echte Detektoren decken eine endliche Fläche, entsprechend endlichen  $\theta$ - und  $\varphi$ -Intervallen bzw. einem Raumwinkel  $\Omega$ . Im idealen Fall eines infinitesimal kleinen Detektors ist das zugehörige Raumwinkelelement  $d^2\Omega$  durch

$$d^2\Omega = \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \quad (\text{I.2})$$

gegeben.

In klassischer Streutheorie definiert man noch den *Stoßparameter*  $b$ , entsprechend dem minimalen Abstand der einfallenden Teilchen zum Streuzentrum für den fiktiven Fall, wo es sich geradlinig bewegen würden, statt abgelenkt zu werden, d.h. bei ausgeschalteter Wechselwirkung.

Berücksichtigt man auch den Azimutwinkel der Flugrichtung des einfallenden Teilchens, so kann man den Stoßparameter als Vektor betrachten:  $\vec{b}$ . Der Zweck der klassischen Streutheorie ist, die Beziehung zwischen den für auslaufende Teilchen charakteristischen Größen  $(\theta, \varphi)$  und dem Stoßparameter  $\vec{b}$ , d.h. die Funktionen  $(\theta(\vec{b}), \varphi(\vec{b}))$ , festzulegen.

#### Bemerkungen:

\* In der Quantenmechanik, wo Teilchen keiner Bahnkurve folgen, verliert der Begriff des Stoßparameters an Bedeutung.

\* Eigentlich ist der vektorielle Stoßparameter  $\vec{b}$  völlig durch seinen Betrag und einen Winkel charakterisiert, und zwar durch den (Polar)Winkel in einer Ebene senkrecht zur Flugrichtung der einfallenden Teilchen. Es handelt sich somit um einen „nur“ zweidimensionalen Vektor.

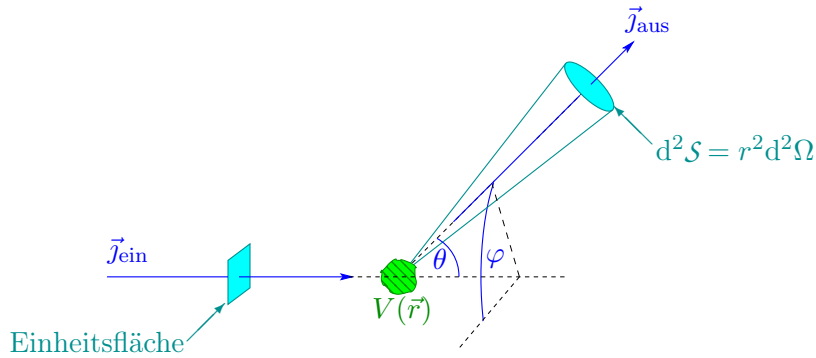
Zur Quantifizierung der Wahrscheinlichkeit für bestimmte Prozesse werden Wirkungsquerschnitte benutzt. Somit charakterisiert der *differentielle Wirkungsquerschnitt* die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einem Streuprozess die gestreuten Teilchen in ein Raumwinkelelement  $d^2\Omega$  um eine Richtung  $(\theta, \varphi)$  emittiert werden (vgl. Abb. [I.2](#)).

Genauer wird  $\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega}(\theta, \varphi)$  definiert durch

$$d^2\sigma = \frac{\text{Anzahl der pro Zeiteinheit in } d^2\mathcal{S} \text{ gestreuten Teilchen}}{\text{Anzahl der einfallenden Teilchen pro Flächen- und Zeiteinheit}}.$$

Zum Ausdrücken der Anzahl  $d^3N_{\text{ein}}$  bzw.  $d^3N_{\text{aus}}$  der in einem Zeitintervall  $dt$  auf eine Fläche  $d^2\mathcal{S}'$  einfallenden bzw. durch eine Fläche  $d^2\mathcal{S}$  ausfallenden Teilchen führt man den einfallenden bzw. auslaufenden Teilchenfluss  $\vec{j}_{\text{ein}}$  bzw.  $\vec{j}_{\text{aus}}$ . Es wird daran erinnert, dass ein Teilchenfluss die Anzahl der in der Zeiteinheit durch eine Einheitsfläche fliegenden Teilchen darstellt. Dann gelten

$$d^3N_{\text{ein}} = |\vec{j}_{\text{ein}}| \, d^2\mathcal{S}' \, dt \quad \text{bzw.} \quad d^3N_{\text{aus}} = |\vec{j}_{\text{aus}}| \, d^2\mathcal{S} \, dt = |\vec{j}_{\text{aus}}| \, r^2 \, d^2\Omega \, dt, \quad (\text{I.3})$$



**Abbildung I.2** – Darstellung einiger Größen zur Definition (I.4) des differentiellen Wirkungsquerschnitts.

wobei  $r$  den Abstand von  $d^2\mathcal{S}$  vom Streuzentrum bezeichnet, und damit

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega}(\theta, \varphi) = \frac{|\vec{J}_{\text{aus}}(r, \theta, \varphi)| r^2}{|\vec{J}_{\text{ein}}|}. \quad (\text{I.4})$$

**Bemerkung:** Die Teilchenzahlerhaltung für die Projektileilchen hat zwei einfache Folgen, und zwar die Proportionalität  $|\vec{J}_{\text{aus}}| \propto |\vec{J}_{\text{ein}}|$  — je mehr Teilchen am Target stoßen, desto mehr gestreut werden — und  $|\vec{J}_{\text{aus}}(r, \theta, \varphi)| \propto 1/r^2$  — entsprechend der Erhaltung der Anzahl der in ein gegebenes Raumwinkelement emittierten Teilchen. Somit ist die Definition (I.4) in der Tat unabhängig vom Abstand  $r$  sowie vom absoluten einfallenden Teilchenfluss.

Die Integration des differentiellen Wirkungsquerschnitt über den ganzen Raumwinkel ergibt den *totalen (elastischen) Wirkungsquerschnitt*:

$$\sigma_{\text{tot}} = \int \frac{d^2\sigma}{d^2\Omega}(\theta, \varphi) d^2\Omega. \quad (\text{I.5})$$

Klassisch handelt es sich dabei um die (effektive) Schnittfläche des Ziels aus der Sicht eines einfallenden Teilchens, wie sich am Beispiel der Streuung eines klassischen Teilchens an einer harten Kugel illustrieren lässt.

#### Bemerkungen:

\* Der Wirkungsquerschnitt hat die Dimension einer Fläche; die typische Einheit in der Kern- und Teilchenphysik ist das Barn,  $1 \text{ b} \equiv 10^{-28} \text{ m}^2$ , sowie seine Teile (mb,  $\mu\text{b}$ , nb, usw.).

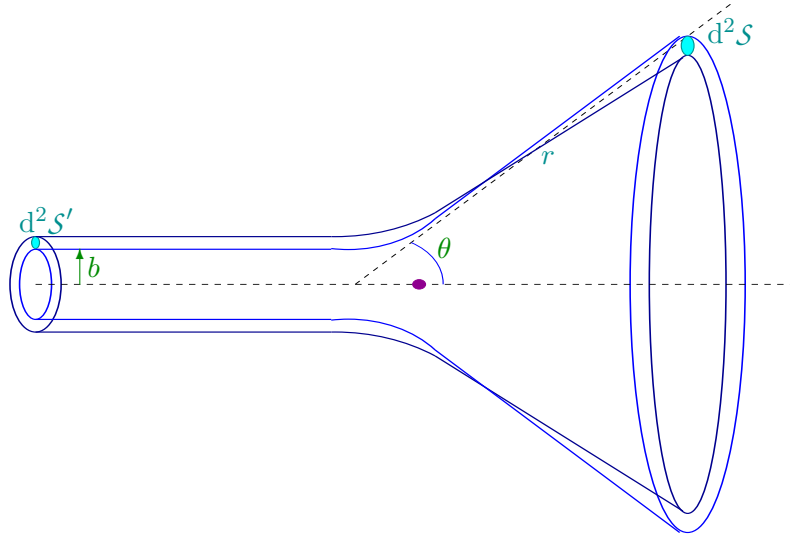
\* In der Definition des differentiellen Wirkungsquerschnitts treten nur die *gestreuten* Teilchen auf. In der Vorwärtsrichtung  $\theta = 0$  können diese nicht von den durchlaufenden Teilchen experimentell unterschieden werden, so dass der zugehörige Vorwärtswirkungsquerschnitt nicht direkt messbar ist, sondern nur durch Extrapolation des Wirkungsquerschnitts bei  $\theta \neq 0$ . Dazu können Detektoren nie den ganzen  $4\pi$ -Raumwinkel um ein Streuzentrum decken. Somit ist der totale Wirkungsquerschnitt mehr ein theoretischer Begriff als eine messbare Größe.

#### I.2.1 b Geometrische Betrachtungen

Im Folgenden wird angenommen, dass das für die Streuung verantwortliche Potential kugelsymmetrisch ist. Dann ist der Azimutwinkel des auslaufenden Teilchens gleich demjenigen vor der Streuung, d.h.  $\varphi$  ist auch der Azimutwinkel von  $\vec{b}$ , während der Streuwinkel  $\theta$  nur vom Betrag  $b$  abhängt. Somit braucht man nur die Abhängigkeit  $\theta(b)$ . Im Prinzip hängt  $\theta$  auch von der Geschwindigkeit bzw. kinetischen Energie der Projektile ab; hier wird angenommen, dass alle einfallenden Teilchen dieselbe kinetische Energie haben.

Im nächsten Abschnitt werden wir eine Kraft zwischen Projektil und Ziel betrachten, deren Stärke mit dem relativen Abstand abnimmt. Infolgedessen wird der Streuwinkel  $\theta$  mit steigendem Stoßparameter  $b$  kleiner, d.h.  $d\theta/db < 0$ .

Sei ein Flächenelement  $d^2\mathcal{S}'$ , abgegrenzt durch die Stoßparameter  $b$  und  $b + db$  mit  $db > 0$  und die Azimutwinkel  $\varphi$  und  $\varphi + d\varphi$ :  $d^2\mathcal{S}' = b db d\varphi$ . Die auf  $d^2\mathcal{S}'$  einfallenden Teilchen werden alle in ein Raumwinkelelement  $d^2\Omega$  gestreut, das bei dem Abstand  $r$  einer Fläche  $d^2\mathcal{S}$  entspricht: geometrisch steht  $d^2\Omega$  in eindeutiger Beziehung zu  $d^2\mathcal{S}'$ , vgl. Abb. I.3. Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass  $d\theta$  negativ für  $db > 0$  ist, gibt die Beziehung (I.2) einfach  $d^2\mathcal{S} = -r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$ .



**Abbildung I.3** – Geometrischer Zusammenhang zwischen den durch die Projektilteilchen vor bzw. nach der Streuung durchgeflogenen Flächenelementen,  $d^2\mathcal{S}'$  bzw.  $d^2\mathcal{S}$ .

Da das Streuprozess elastisch ist, und somit die Teilchenzahl erhält, sind die Anzahlen der in  $dt$  durch die Flächen  $d^2\mathcal{S}$  und  $d^2\mathcal{S}'$  fliegenden Teilchen gleich. Unter Nutzung der Beziehungen (I.3) ergibt sich dann

$$|\vec{j}_{\text{ein}}| b db d\varphi = -|\vec{j}_{\text{aus}}(r, \theta, \varphi)| r^2 \sin\theta d\theta d\varphi.$$

Nach einfacher Umschreibung dieser Gleichung und Einsetzen in die Definition (I.4) erhält man die Beziehung

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega}(\theta, \varphi) = -\frac{b}{\sin\theta} \frac{db}{d\theta}, \quad (\text{I.6})$$

unabhängig von der spezifischen Wechselwirkung zwischen Projektil und Ziel. Somit ist der differentielle Wirkungsquerschnitt völlig durch die Funktion  $b(\theta)$  bzw. durch die Umkehrfunktion  $\theta(b)$  und ihre Ableitung bestimmt.