

# KAPITEL IV

## Kernenergie

---

IV.1	Induzierte Spaltung	91
IV.1.1	Grundlagen der induzierten Spaltung	91
IV.1.2	Neutronenquerschnitte	92
IV.1.3	Spaltprodukte	93
IV.2	Kettenreaktion	94
IV.2.1	Grundlagen	94
IV.2.2	Kernenergie	95
IV.2.3	Reaktortypen	97
IV.3	Kernfusion	97

---

### IV.1 Induzierte Spaltung

Die Spaltbarriere, die die energetisch mögliche spontane Spaltung eines Kerns verhindert (vgl. § III.3.5 e), kann durch die Absorption eines Teilchens überwunden werden: man spricht dann von einer *induzierten Spaltung*.

#### IV.1.1 Grundlagen der induzierten Spaltung

Eine nicht-vernachlässigbare Absorption mit anschließender Spaltung kann nur mit Neutronen stattfinden: positiv geladene Teilchen – meistens Protonen oder  $\alpha$ -Teilchen – werden durch die positive elektrische Ladung des Kerns abgestoßen; während negativ geladene Teilchen – Elektronen – können nicht wirksam Spaltungen induzieren (ihre Wechselwirkung mit dem Kern ist elektromagnetischer Natur und kann daher die Struktur des Kerns für übliche Energien nicht viel modifizieren). Im Folgenden wird also nur die durch Neutronen induzierte Spaltung diskutiert. Außerdem wird nur der Fall nicht-relativistischer Neutronen – d.h. mit einer kinetischen Energie  $E_{n_{\text{kin}}} \ll 1 \text{ GeV}$  – in Betracht gezogen.

Die Reaktion  $n + {}^A_Z\text{X}$  führt zuerst zum angeregten *Compoundkern*  ${}^{A+1}_Z\text{X}^*$ .

Unter der Annahme, dass die kinetische Energie  $E_{n_{\text{kin}}}$  des eingebrachten Neutrons sich sofort auf *alle* Nukleonen des Zielkerns verteilt („Sandsackmodell“), hat keines von den Nukleonen des Zwischenkerns genügend Energie, um den Kern sofort wieder zu lassen: der Zwischenzustand ist gebunden und kann also als einen Kern betrachtet werden. Wegen der zugefügten kinetischen Energie ist dieser Compoundkern aber sehr deformiert, so dass er instabil ist und nach kurzer Zeit  $\approx 10^{-19} \text{ s}$  zerfällt.

Im Rahmen des Tröpfchenmodells des Atomkerns hat Niels Bohr 1936 die Streuung von zwei Kernen als eine Kollision von zwei Flüssigkeitstropfen beschreibt. Die Tropfen können sich vereinigen und einen großen, meist schnell vibrierenden und rotierenden Tropfen bilden, der wegen der zugefügten Energie instabil ist und wieder zerfällt.

Dieser Compoundkern kann dann entweder ein Neutron emittieren – möglicherweise mit derselben Energie als diejenige des einfallenden Neutrons, sodass die Streuung  $n + \text{X} \rightarrow n + \text{X}$  insgesamt

elastisch ist; sonst ist die Streuung inelastisch –, oder seine Anregungsenergie durch die Emission eines Photons abgeben, oder er kann spalten. Den verschiedenen Möglichkeiten werden betreffende Wirkungsquerschnitte  $\sigma_{\text{el}}$ ,  $\sigma_{\text{inel}}$ ,  $\sigma_{(n,\gamma)}$ ,  $\sigma_{\text{Sp}}$  zugeordnet, sowie ein totaler Wirkungsquerschnitt  $\sigma_{\text{tot}} \equiv \sigma_{\text{el}} + \sigma_{\text{inel}} + \sigma_{(n,\gamma)} + \sigma_{\text{Sp}}$ . Diese sogenannten *Neutronenquerschnitte* werden in Abschnitt [IV.1.2](#) diskutiert.

### Wichtiges Beispiel eines spaltbaren Kerns: Uran

Die Eigenschaften der induzierten Spaltung werden aufgrund seiner wirtschaftlichen Bedeutung mithilfe vom Beispiel des Urankerns dargestellt.

Uran ( ${}_{92}\text{U}$ ) besitzt drei natürlich vorkommende Isotope:

Isotop	Halbwertszeit $T_{1/2}$	heutiger Anteil
${}^{234}\text{U}$	$2,455 \cdot 10^5$ Jahre	0,0054%
${}^{235}\text{U}$	$7,04 \cdot 10^8$ Jahre	0,7204%
${}^{238}\text{U}$	$4,468 \cdot 10^9$ Jahre	99,2742%

Wegen seiner geringen Häufigkeit wird  ${}^{234}\text{U}$  nicht weiter in Betracht kommen.

- $n + {}^{235}\text{U} \rightarrow {}^{236}\text{U}^*$ : Im Ruhesystem des  ${}^{235}\text{U}$ -Kerns lautet die Erhaltung der Energie in der Reaktion [\(62\)](#)

$$m({}^{236}\text{U}^*)c^2 = m_n c^2 + E_{n_{\text{kin}}} + m({}^{235}\text{U})c^2,$$

sodass die Anregungsenergie  $E^* = [m({}^{236}\text{U}^*) - m({}^{236}\text{U})]c^2$  des erzeugten Compoundkerns  ${}^{236}\text{U}^*$  ist

$$E^* = [m({}^{235}\text{U}) + m_n - m({}^{236}\text{U})]c^2 + E_{n_{\text{kin}}} = S_n({}^{236}\text{U}) + E_{n_{\text{kin}}},$$

wobei  $S_n({}^{236}\text{U}) \simeq 6,5$  MeV die Separationsenergie ([I.25a](#)) für die Abspaltung eines Neutrons ist.

Die Spaltschwelle für  ${}^{236}\text{U}$  ist  $\Delta E_{\text{Sp}}({}^{236}\text{U}) \simeq 5,7$  MeV, und zwar kleiner als  $E^*$  für jeden Wert der kinetischen Energie  $E_{n_{\text{kin}}}$  des Neutrons: der erzeugte angeregte Compoundkern  ${}^{236}\text{U}^*$  kann spalten, ohne eine Energiebarriere zu überwinden zu haben.

- $n + {}^{238}\text{U} \rightarrow {}^{239}\text{U}^*$ : Ähnlich dem Fall der induzierten Spaltung von  ${}^{235}\text{U}$  findet man, dass die Anregungsenergie des Compoundkerns  ${}^{239}\text{U}^*$  durch  $E^* = S_n({}^{239}\text{U}) + E_{n_{\text{kin}}}$  gegeben ist. Der gu-Kern  ${}^{239}\text{U}$  besitzt ein ungepaartes Neutron, dessen Separationsenergie erheblich kleiner als jene des gg-Nachbarkerns  ${}^{236}\text{U}$  ist:  $S_n({}^{239}\text{U}) \simeq 4,8$  MeV. Dies ist kleiner als die Höhe  $\Delta E_{\text{Sp}}({}^{239}\text{U}) \simeq 6,2$  MeV der Spaltbarriere von  ${}^{239}\text{U}$ : Um eine Spaltung induzieren zu können ist eine kinetische Energie des Neutrons  $E_{n_{\text{kin}}} > 1,4$  MeV nötig, sonst ist die Anregungsenergie des erzeugten Compoundkerns nicht hoch genug, um die Spaltbarriere zu überwinden.

Deshalb ist die Neutron-induzierte Spaltung von  ${}^{235}\text{U}$  leichter als diejenige von  ${}^{238}\text{U}$ . Allgemein sind die gu-Kerne –  ${}^{233}\text{U}$ ,  ${}^{235}\text{U}$ ,  ${}^{239}\text{Pu}$ ,  ${}^{241}\text{Pu}$  – leichter spaltbar als die gg-Kerne –  ${}^{232}\text{Th}$ ,  ${}^{238}\text{U}$ ,  ${}^{240}\text{Pu}$ ,  ${}^{242}\text{Pu}$ .

## IV.1.2 Neutronenquerschnitte vgl. Folie

Für  ${}^{235}\text{U}$ : drei Bereiche.

**Gebiet I:**  $\frac{\sigma_{\text{Sp.}}}{\sigma_{\text{tot.}}} \approx 84\%$  und  $\sigma_{\text{tot.}} \propto 1/v$  mit  $v$  der Neutronengeschwindigkeit.

**Gebiet II:** Resonanzen: „radiative capture“ ( $n + {}^{235}\text{U} \rightarrow {}^{236}\text{U}^* \rightarrow {}^{236}\text{U} + \gamma$ ) dominiert den totalen Wirkungsquerschnitt.

<sup>(62)</sup>Die Rückstoßenergie des Compoundkerns wird vernachlässigt.

**Gebiet III:** elastische und inelastische Streuung, wenige Spaltung.

Offensichtlich ist es günstiger, Neutronen mit kleinerer kinetischer Energie zu verwenden, insbesondere sog. *thermische Neutronen*, mit  $E_{n_{\text{kin}}} \simeq 0,025 \text{ eV} = k_B T$  mit  $T \approx 300 \text{ K}$ .

Für  $^{238}\text{U}$ :

**Gebiet I:**  $\sigma_{\text{Sp.}} = 0$ ,  $\sigma_{\text{tot.}}$  ungefähr konstant.

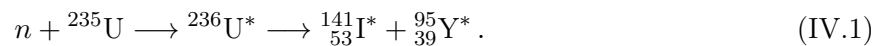
**Gebiet II:** Resonanzen

**Gebiet III:** ab  $E_{n_{\text{kin}}} = 1,4 \text{ MeV}$  findet induzierte Spaltung statt.

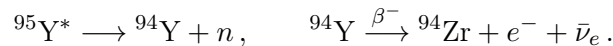
### IV.1.3 Spaltprodukte

Wegen des großen Neutronenüberschusses bei spaltbaren Nukliden (z.B.  $N/Z \simeq 1,57$  für  $^{236}\text{U}^*$ ) sind die Spaltprodukte ebenfalls neutronenreich: deshalb werden diese Produkte spontan ein paar prompte Neutronen emittieren bzw. über  $\beta^-$ -Emission zerfallen, wobei die Zerfallsprodukte möglicherweise verzögerte Neutronen emittieren können.

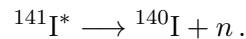
Somit führt die induzierte Spaltung  $n + ^{235}\text{U} \rightarrow ^{236}\text{U}^*$  zu zwei großen meist angeregten Fragmenten mit Massen- und Protonenzahlen  $A \approx 140$ ,  $Z \approx 55$  (I, Xe, Cs, Ba, La) bzw.  $A \approx 95$ ,  $Z \approx 37$  (Br, Kr, Rb, Sr, Y), z.B.



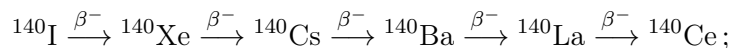
Dann führt das leichtere Fragment nach einer prompten Neutronenemission und einem  $\beta^-$ -Zerfall zum stabilen  $^{94}\text{Zr}$ -Kern:



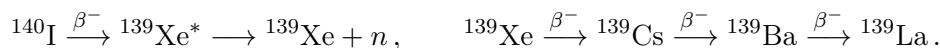
Währenddessen zerfällt  $^{141}\text{I}^*$  über prompten Neutronenzerfall:



Dem instabilen  $^{140}\text{I}$ -Nuklid, dessen Halbwertszeit 0,86 s beträgt, stehen zwei Zerfallskanäle zur Verfügung: meistens wandelt es sich über  $\beta^-$ -Zerfall in den Grundzustand von  $^{140}\text{Xe}$  um, was nach 4 weiteren  $\beta^-$ -Zerfällen zu  $^{140}\text{Ce}$  führt (der Kürze halber werden die im jeden Schritt emittierten Elektron und Antineutrino nicht geschrieben):



alternativ zerfällt  $^{140}\text{I}$  in einen angeregten Zustand von  $^{140}\text{Xe}$ , der dann — instantan nach dem  $\beta^-$ -Zerfall, jedoch verzögert im Bezug zum Spaltprozess — ein Neutron emittiert; danach geht das Tochternuklid  $^{139}\text{Xe}$  nach 3  $\beta^-$ -Zerfällen in  $^{139}\text{La}$  über:



Insgesamt werden nach dem Spaltprozess (IV.1) zwei prompte Neutronen emittiert, und dazu entweder 6 Paare ( $e^-, \bar{\nu}_e$ ), oder nur 5 Paare ( $e^-, \bar{\nu}_e$ ) mit einem verzögerten Neutron. Berücksichtigt man die verschiedenen Spaltkanäle mit den zugehörigen Verzweungsverhältnissen, so werden im Schnitt etwa 2,5 prompte und 0,04 verzögerte Neutronen emittiert.

**Bemerkung:** In fast jedem Schritt kann neben der  $\beta^-$ -Strahlung noch  $\gamma$ -Strahlung emittiert werden, wenn ein Zerfall nicht zum Grundzustand, sondern zu einem angeregten Zustand des Tochterkerns führt.

#### Energiebilanz

Primäre Spaltung: ca. 200 MeV freigesetzt.

- etwa 10 MeV werden durch Antineutrinos getragen und entweichen somit dem System;
- etwa 15 MeV werden verzögert emittiert (Elektronen und Photonen aus  $\beta^-$ -Zerfällen).

⇒ technisch sind ca. 190 MeV pro Spaltung „nutzbar“.

## IV.2 Kettenreaktion

### IV.2.1 Grundlagen

In einem Spaltungsereignis entstehen  $\nu > 1$  Neutronen je gespaltenem Kern. Jedes dieser Neutronen kann mit Spaltwahrscheinlichkeit  $q$  zu einer weiteren Spaltung führen. Für  $\nu q \geq 1$  ergibt sich eine *Kettenreaktion*.

Sei  $t_{\text{Zyklus}}$  die mittlere Zeitdauer eines Spaltzyklus, d.h. die durchschnittliche Zeit zwischen dem Entstehen von Neutronen in einem Spaltungsereignis und deren Verschwinden — indem sie entweder weitere Spaltungen induzieren, oder „verloren“ werden (s. unten). Je ursprünglich emittiertem Neutron entstehen in dieser Zykluszeit einerseits  $\nu q$  neue Neutronen, während andererseits ein Neutron zerstört wird. Wenn  $n_n(t)$  die Neutronendichte — Anzahl der Neutronen pro Volumeneinheit — im Spaltmaterial zur Zeit  $t$  bezeichnet, dann gilt für nicht zu großes  $\delta t$  die Bilanzgleichung

$$n_n(t + \delta t) = n_n(t) + (\nu q - 1)n_n(t) \frac{\delta t}{t_{\text{Zyklus}}}. \quad (\text{IV.2})$$

Im Limes  $\delta t \rightarrow 0$  ergibt sich dann die lineare Differentialgleichung

$$\frac{dn_n(t)}{dt} = \frac{\nu q - 1}{t_{\text{Zyklus}}} n_n(t), \quad (\text{IV.3})$$

die sich sofort als

$$n_n(t) = n_n(t_0) e^{(\nu q - 1)(t - t_0)/t_{\text{Zyklus}}} \quad (\text{IV.4})$$

lösen lässt.

Für  $\nu q > 1$  wächst die Neutronendichte exponentiell, entsprechend einer exponentiellen Zunahme der Anzahl der Spaltungen im System, das als *überkritisch* bezeichnet wird. Wegen der in jedem Spalteneignis freigesetzten Energie, die sich in kinetische Energie der Fragmente umwandelt, wird das System explodieren.

Dagegen nimmt in einem *unterkritischen* System mit  $\nu q < 1$  die Neutronendichte bzw. die Anzahl der Spaltungen exponentiell ab, während sie in einem *kritischen* System mit  $\nu q = 1$  — was aber nur eine mathematische Idealisierung sein kann — konstant bleiben.

kritisches System  $\Rightarrow$  kritischer Radius

Wie groß ist  $q$ ?

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Neutron in einer Streuung an einem spaltbaren Kern eine Spaltung induziert, ist  $\sigma_{\text{Sp.}}/\sigma_{\text{tot.}}$ : hängt von der kinetischen Energie des Neutrons ab.

Dieses Verhältnis stellt die Größenordnung für  $q$  dar: mit  $E_{n_{\text{kin}}} = 2$  MeV (typisch für ein nach einer Spaltung emittiertes Neutron), für  $^{235}\text{U}$ ,  $q_{235} \approx 0,18$ ; für  $^{238}\text{U}$ ,  $q_{238} \approx 0,05$ .

Wenn die erste Streuung eines Neutrons nicht zu einer Spaltung führt, zwei Möglichkeiten: 1. Neutron wurde eingefangen [( $n, \gamma$ )-Prozess]: dann kann es keine weitere Spaltung induzieren! 2. Neutron hat inelastisch gestreut, d.h. hat eine geringere kinetische Energie nach der Streuung; dann hat es eine weitere Chance, eine Spaltung im nächsten Streuprozess zu induzieren, jetzt mit meistens einer unterschiedlichen Wahrscheinlichkeit  $\sigma_{\text{Sp.}}/\sigma_{\text{tot.}}$ . Z.B. ist  $\sigma_{\text{Sp.}}/\sigma_{\text{tot.}} = 0,84$  für thermische Neutronen an  $^{235}\text{U}$ .

Dazu sollen noch, in realistischen, nicht unendlich großen Systemen, geometrische (Oberflächen-) Verluste berücksichtigt werden: Neutronen entkommen dem System.

Anzahl von Streuungen bis zur Spaltung

Vereinfachtes Modell: Neutron kann entweder eine Spaltung induzieren, oder elastisch gestreut werden. Somit bleibt  $\sigma_{\text{Sp.}}/\sigma_{\text{tot.}} \equiv p$  konstant.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Spaltung im  $k$ -ten Stoß stattfindet, ist  $p(1-p)^{k-1}$ , wobei der Faktor  $(1-p)^{k-1}$  der Wahrscheinlichkeit entspricht, dass die  $k-1$  ersten Streuungen keine Spaltung induziert haben. Dann ist die mittlere Anzahl von Streuungen bis zur Spaltung

$$\langle N_{\text{Str.}} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} = \frac{1}{p}.$$

Dementsprechend ist die durchschnittliche Zeit  $t_{\text{diff}}$  bis zum Verschwinden des Neutrons gleich  $1/p$  mal der mittleren Zeit zwischen zwei Streuungen.

Die Flugbahn des Neutrons im Spaltmaterial ist eine Zufallsbewegung (Brownsche Bewegung): dessen Abstand von dem Ausgangspunkt nach  $n$  Schritten ist  $\sqrt{n}$  mal der mittleren freien Weglänge  $\ell_{\text{mfp}}$ . Somit ist die mittlere Diffusionslänge eines Neutrons im System  $\ell_{\text{diff}} \simeq \sqrt{\langle N_{\text{Str.}} \rangle} \ell_{\text{mfp}}$ . Für  $^{235}\text{U}$ , mit  $p \approx q_{235} \approx 0,18$ ,  $\langle N_{\text{Str.}} \rangle \approx 5,5$ ,  $\ell_{\text{diff}} \approx 7 \text{ cm}$ ,  $t_{\text{diff}} \approx 10^{-8} \text{ s}$ .