Übung Nr. 2

Diskussionsthemen: Auf welchen Ideen beruht die Beschreibung des Kerns als ein Flüssigkeitströpfchen? als ein Fermi-Gas?

5. Separationsenergie

Zur Bestimmung der Stabilität von Atomkernen werden sogenannte Separationsenergien für die Abspaltung verschiedener Teilchen eingeführt:

- Separationsenergie für die Abspaltung eines Neutrons:

$$S_{\mathrm{n}}(Z,N) \equiv [m(Z,N-1) + m_{\mathrm{n}} - m(Z,N)]\, c^2;$$

- Separationsenergie für die Abspaltung eines Protons:

$$S_{\mathrm{p}}(Z,N) \equiv [m(Z-1,N) + m_{\mathrm{p}} - m(Z,N)]\, c^2;$$

- Separationsenergie für die Abspaltung eines α-Teilchens (Masse m_α):

$$S_\alpha(Z,N) \equiv [m(Z-2,N-2) + m_\alpha - m(Z,N)]\, c^2,$$

wobei $m(Z,N)$ die Masse des Kerns mit Z Protonen und N Neutronen bezeichnet.

i. Schreiben Sie diese Separationsenergien mithilfe der Kernbindungsenergien um.

ii. Falls $S_{\mathrm{n}} > 0$, was ist die Bedeutung von S_{n}?

iii. Was ist die Bedeuteung eines negativen Werts der Separationsenergie S_α, der Separationsenergien S_{n} bzw. S_{p}?

Die Linie $S_{\mathrm{n}} = 0$ bzw. $S_{\mathrm{p}} = 0$ in der $N-Z$-Ebene (vgl. Nuklidkarte) heißt „neutron drip line“ bzw. „proton drip line“.

iv. In einem Kernreaktor findet die Reaktion $\mathrm{n} + {}^{235}_{92}\mathrm{U} \to {}^{236}_{92}\mathrm{U}^*$ statt, wobei die *-Schreibweise bedeutet, dass der ^{236}U-Kern in einem angeregten Zustand ist. Es sei $E^* = [m(^{236}\mathrm{U}^*) - m(^{236}\mathrm{U})]\, c^2$ seine Energie im Bezug auf den Grundzustand.

Im Falle wo die relative Geschwindigkeit von Neutron und ^{235}U-Kern sehr klein ist, wie lautet die Erhaltung der Energie in der Reaktion im Schwerpunktsystem der Reaktionspartner? Was ist dann der Zusammenhang zwischen E^* und der Separationsenergie $S_{\mathrm{n}}(^{236}\mathrm{U})$?

6. Bethe-Weiszäcker Massenformel

Die Masse eines Atomkerns ist näherungsweise gegeben durch

$$m(Z,A) = Zm_{rmp} + (A-Z)m_{\mathrm{n}} - \frac{a_V A - a_S A^{2/3} - a_C Z^2 A^{-1/3} - a_A (Z - \frac{A}{2})^2 A^{-1} + B_\delta}{c^2},$$

mit dem Paarungsterm $B_\delta = \begin{cases} +a_\delta A^{-1/2} & \text{für gg-Kerne} \\ 0 & \text{für ug- und gu-Kerne} \\ -a_\delta A^{-1/2} & \text{für uu-Kerne} \end{cases}$

und $a_V = 15,85$ MeV, $a_S = 18,34$ MeV, $a_C = 0,71$ MeV, $a_A = 92,86$ MeV, $a_\delta = 11,46$ MeV.

i. Berechnen Sie hieraus die Bindungsenergie pro Nukleon B/A für ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$, ${}^{56}_{26}\mathrm{Fe}$, ${}^{62}_{28}\mathrm{Ni}$.

ii. Zeigen Sie, dass der Zerfall ${}^{240}_{94}\mathrm{Pu} \to {}^{128}_{50}\mathrm{Sn} + {}^{110}_{44}\mathrm{Ru} + 2\mathrm{n}$ energetisch möglich ist.

iii. Für gegebene Z, für welche $N = A - Z$ hat die Bindungsenergie pro Nukleon (unter Auslassung des Paarungsterms B_δ) ihr Maximum? Vergleichen Sie Ihr Ergebnis für Nickel ($Z = 28$) und Zinn ($Z = 50$) mit der Nuklidkarte.

(Für eine online Nuklidkarte, s. `http://www.nndc.bnl.gov/chart/`)

iv. In der Bindungsenergie hängen nur der Coulomb-Term und der Asymmetrie-Term explizit von Z ab, wobei der Coulomb-Term Z zu minimieren versucht, während der Asymmetrie-Term auf $Z = N$ abzielt. Es sei A ungerade. Für welche Z ist es energetisch günstiger, dass sich ein Proton in ein Neutron verwandelt? Testen Sie ihren Ausdruck für $A = 125$.

7. Fermi-Gas: Neutronensterne

Bis auf dem (gegebenen!) Wert der Teilchendichte in einem großen Kern erfordert diese Aufgabe keine Kenntnisse von der Kernphysik-Vorlesung.

Nach dem Verbrauch ihres nuklearen „Brennstoffs“ kollabieren Sterne mit einer Masse von etwa 10 $M_\odot$ zu Neutronensternen.[1] Der Einfachheit halber wird hier angenommen, dass diese ausschließlich aus entarteten Neutronen bestehen, deren Dichte im ganzen Stern konstant ist.

i. Die Teilchendichte in einem Neutronenstern ist vergleichbar mit jener im Zentrum eines großen Kerns ($n_\infty = 0,17$ Nukleonen/fm^3) und die typische Temperatur ist $T \approx 10^8$ K. Zeigen Sie, dass der Neutronenstern als ein Fermi-Gas von nicht-relativistischen[2] Neutronen bei Null-Temperatur beschrieben werden kann.

Es sei dann

$$E_F = \left(3\pi^2 \frac{\mathcal{N}_\mathrm{n}}{V}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{2m_\mathrm{n}}$$

die betreffende Fermi-Energie, mit $\mathcal{N}_\mathrm{n}$ der Zahl von Neutronen im Stern und V dem Sternvolumen.

ii. Berechnen Sie die Gesamtenergie $E(R)$ des Neutronensterns in Abhängigkeit seines Radius R. Diese besteht aus zwei Beiträgen: der inneren Energie (mit der durchschnittlichen Energie pro Neutron $\langle E \rangle = \frac{3}{5} E_F$) und der Gravitationsenergie E_G. Leiten Sie die letztere analog zur Betrachtung in der Vorlesung bezüglich der potentiellen elektrostatischen Energie einer homogen geladenen Kugel her.

iii. Ermitteln Sie den Gleichgewichtsradius R_eq, für den die Energie $E(R)$ mimimal wird. Was bemerken Sie? Berechnen Sie den Wert dieses Radius für einen Neutronenstern mit der Masse $M = 1,4\ M_\odot$.

[1] 1 $M_\odot = 1,99 \cdot 10^{30}$ kg ist die Masse der Sonne.
[2] d.h. kinetische Energie $\ll$ Massenenergie