Übung Nr. 1

1. Klassische Streutheorie

Im Folgenden wird die Streuung an einem kugelsymmetrischen Target betrachtet, so dass die Streuintensität nicht vom Azimutwinkel φ abhängt.

i. Wirkungsquerschnitt. Was ist die Bedeutung des (totalen) Wirkungsquerschnitts σ und des differentiellen Wirkungsquerschnitts $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega$?

ii. Streuung an einer harten Kugel. Berechnen Sie den differentiellen und totalen Wirkungsquerschnitt für elastische Streuung an einer harten Kugel mit dem Radius R, ausgehend von der Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}(\theta) = -\frac{b}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta},$$

indem Sie auch b durch den Streuwinkel ausdrücken. Welche Besonderheit tritt für den differentiellen Wirkungsquerschnitt auf?

iii. Typische Einheit des Wirkungsquerschnitts. Was ist im Harte-Kugeln-Modell der Wert des totalen Wirkungsquerschnitts eines $^{208}_{82}$Pb-Kerns (Blei)? Benutzen Sie hierbei für den Kernradius $R = 1,3A^{1/3}$ fm.

iv. Wirkungsquerschnitt und mittlere freie Weglänge. Zwischen dem totalen Wirkungsquerschnitt σ eines Targets und der mittleren freien Weglänge ℓ eines Teilchens, das sich durch ein Medium aus Targetteilchen mit Teilchendichte n bewegt, besteht der Zusammenhang $\ell = \frac{1}{n\sigma}$. Warum?

2. Rutherford'sche Streuformel

Für die Streuung eines Punktteilchens mit der Ladung Ze an einem punktförmigen Target mit der Ladung $Z'e$ gilt die Rutherford'sche Streuformel

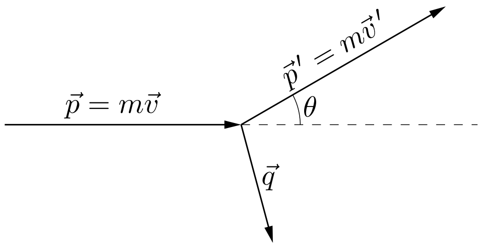
$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\text{punkt}}(\theta) = \frac{1}{16}\left(\frac{ZZ'e^2}{4\pi\epsilon_0 E_{\text{kin}}}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}. \tag{1}$$

i. Zeigen Sie durch ein einfaches Argument, dass der entsprechende totale Wirkungsquerschnitt σ_{tot} divergiert. Der Grund dafür ist, dass das durch eine isolierte elektrische Ladung erzeugte Coulomb Potential $V_{\text{Coul}}(r)$ eine unendliche Reichweite hat (d.h. $\lim_{r\to\infty} r\,V_{\text{Coul}}(r) \neq 0$).

ii. In einem Atom wird die positive Ladung des Kerns für große Abstände durch die negativ geladenen Elektronen abgeschirmt, so dass die effektive Reichweite des elektrischen Potentials des Kerns dennoch begrenzt ist. Wie groß ist der totale Wirkungsquerschnitt im Fall der Streuung von α-Teilchen mit $E_{\text{kin}} = 5,5\,\text{MeV}$ an Gold-Atomen, wenn Sie annehmen, dass für einen Stoßparameter b größer als der Atomradius $R_{\text{Au}} = 1,35 \cdot 10^{-10}\,\text{m}$ keine Streuung mehr erfolgt?

iii. Zur Beschreibung einer Streuung wird oft der Impulsübertrag $\vec{q} = \vec{p} - \vec{p}\,'$ eingeführt (s. Abbildung).
Zeigen Sie (Tipp: die Streuung ist elastisch!), dass eine andere Schreibweise der Rutherford'schen Streuformel (1) lautet

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\text{punkt}}(\vec{q}) = \frac{(2ZZ'\alpha m)^2}{q^4}, \tag{2}$$



wobei $\alpha \equiv \dfrac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \simeq \dfrac{1}{137}$ die elektromagnetische Feinstrukturkonstante ist.
(In Gl. (2) wird das System „natürlicher" Einheiten mit $\hbar = c = 1$ benutzt.)

3. Elektrischer Formfaktor

Im Fall der Streuung elektrischer Ladungen an einem ausgedehnten geladenen Target wird der sogenannte elektrische Formfaktor $F^2(\vec{q})$ eingeführt, wobei $\vec{q}$ der Impulsübertrag ist (s. Aufgabe 2.iii). $F^2(\vec{q})$ ist[1] der quadrierte Betrag der Fourier-Transformierten der Ladungsdichteverteilung $\rho(\vec{r})$:

$$F^2(\vec{q}) \equiv \left| \frac{1}{Z'e} \int \mathrm{d}^3\vec{r}\,\rho(\vec{r})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar} \right|^2, \tag{3}$$

und der differentielle Wirkungsquerschnitt lautet dann

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}(\vec{q}) = \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\text{punkt}}(\vec{q}) \cdot F^2(\vec{q}).$$

i. Was ist der elektrische Formfaktor eines Punktteilchens?

ii. Zeigen Sie, dass im Fall einer kugelsymmetrischen Ladungsdichteverteilung $\rho(r)$ die Gl. (3) gibt

$$F^2(\vec{q}) = \left| \frac{1}{Z'e} \int_0^{+\infty} \rho(r)\,\frac{\sin(qr/\hbar)}{qr/\hbar}\,4\pi r^2\,\mathrm{d}r \right|^2.$$

iii. Berechnen Sie den Formfaktor einer Gaußchen Ladungsverteilung $\rho(r) = \rho_0 \left(\dfrac{a^2}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{-a^2r^2/2}$.

4. Woods–Saxon Verteilung

Die Woods–Saxon (Ladungsdichte-)Verteilung ist gegeben durch

$$\rho(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{1 + \mathrm{e}^{\frac{r - R_{1/2}}{z}}},$$

wobei z die Breite des Kernrands bestimmt.

i. Ermitteln Sie über welche Distanz (in Einheiten von z) die Ladungsdichte von 80% auf 20% absinkt.

ii. Berechnen Sie den Wert der Verteilung im Zentrum des Kerns in der Näherung $z \ll R_{1/2}$.

[1] bis auf einen Faktor $\dfrac{1}{Z'^2e^2}$