Übung Nr. 9

Diskussionsthema:

Auf welchem Phänomen beruht die Emission eines α-Teilchens durch einen Kern? Wie wird die entsprechende Zerfallskonstante bzw. Halbwertszeit berechnet und welche experimentelle Beobachtung bestätigt die (grobe) Gültigkeit der Berechnung?

22. Altersbestimmung

Datieren Sie das Grabtuch von Turin, welches als Reliquie verehrt wurde, da darauf das Gesicht von Jesus von Nazaret zu sehen sei. Bei einer Radiocarbonanalyse aus dem Jahr 1988 wurde mittels Massenspektrometrie das Isotopenverhältnis $^{14}\mathrm{C}/^{12}\mathrm{C} = 9{,}268\cdot 10^{-12}$ für eine Probe des Tuchs gemessen.[1] In lebender Materie ist die relative Häufigkeit von ^{12}C 98,89 %, von ^{13}C 1,11 % und von ^{14}C 10^{-10} %. ^{14}C wird in der Atmosphäre durch die Reaktion $\mathrm{n} + {}^{14}\mathrm{N} \to \mathrm{p} + {}^{14}\mathrm{C}$ erzeugt und durch Photosynthese in die Nahrungskette von Organismen aufgenommen. In toter Materie zerfällt ^{14}C, ohne dass der Verlust durch Austausch mit der Atmosphäre kompensiert werden könnte. Die Halbwertszeit von ^{14}C beträgt 5730 Jahre. Wann wurde der Leinen, aus dem das Grabtuch besteht, vermutlich hergestellt?

23. α-Zerfall

Ein gg-Kern zerfällt durch α-Emission. Welche J^Π Zustände kann der Tochterkern annehmen?

24. α-Zerfall für breite Zerfallsbarrieren

i. In der Vorlesung wurde der allgemeine Ausdruck für die Zerfallskonstante

$$\lambda_\alpha = J_0 \mathrm{e}^{-G}, \qquad G = \frac{\pi}{\hbar c}\frac{2Z_T e^2}{4\pi\epsilon_0}\sqrt{\frac{2mc^2}{Q_\alpha}}\,\gamma\!\left(\frac{R}{r_c}\right), \qquad \gamma(x) = \frac{2}{\pi}\Big[\arccos\sqrt{x} - \sqrt{x(1-x)}\Big]$$

hergeleitet, wobei R bzw. r_c der Kernrand bzw. der Austrittsabstand ist und Z_T die Kernladungszahl des Tochterkerns. Außerdem ist die Frequenz, mit der das α-Teilchen gegen die Potentialbarriere stößt $J_0 = v_{\mathrm{in}}/(2R)$. Zeigen Sie durch Entwicklung in $\sqrt{x}$ bis zur ersten Ordnung, dass für Kerne mir $R/r_c \ll 1$ (d.h. mit einer „breiten Zerfallsbarriere") die Zerfallskonstante gegeben ist durch

$$\lambda_\alpha = \frac{v_{\mathrm{in}}}{2R}\exp\left(-\frac{Z_T e^2}{\epsilon_0 \hbar v} + \frac{4e}{\hbar}\sqrt{\frac{Z_T m R}{\pi\epsilon_0}}\right).$$

ii. Wir wollen im Folgenden eine Modifikation der Tunnelbarriere durch Zentrifugalkräfte betrachten: Die Schrödinger-Gleichung für den Radialteil dieses Problems ist:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2} + V_{\mathrm{eff}}(r)u(r) = E, \qquad V_{\mathrm{eff}}(r) = \frac{2Z_T e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{r^2},$$

wobei $\psi(\vec{r}) = u(r)\,Y_\ell^m(\theta,\varphi)/r$ die Wellenfunktion des α-Teilchens ist und ℓ seine Bahndrehimpulsquantenzahl. Berechnen Sie, um welchen Bruchteil die Höhe B der Potentialbarriere bei $r = R$ in Abhängigkeit von $\ell > 0$ zunimmt. Berechnen Sie auch das Verhältnis der Zerfallskonstanten $\lambda_\alpha(\ell)/\lambda_\alpha(0)$ für $\ell = 1, 2, 3$.

[1] P.E.Damon *et al.*, Nature **337** (1989) 611.