Übung Nr. 6

Diskussionsthemen:

- Wie werden die „magischen Zahlen“ der in einem Potentialtopf eingeschlossenen Nukleonen erhalten?

- (Besprechung am 9. bzw. 12. Dezember) Informieren Sie sich über die Anwendungen der Kernspinresonanz, insbesondere die Magnetresonanztomographie.

13. Spin und Parität

Berechnen Sie Spin und Parität $J^{\Pi}_{\rm Kern}$ der folgenden Kerne: ^{30}Si, ^{40}Ca, ^{41}Ca, ^{59}Co.

14. Elektrisches Quadrupolmoment

i. Zeigen Sie, dass eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung kein elektrisches Quadrupolmoment hat.

ii. Wir wollen im Folgenden das elektrische Quadrupolmoment eines deformierten Kerns ausrechnen. Hierbei sei die Oberfläche eines prolaten Ellipsoiden beschrieben durch die Funktion

$$r(\theta,\varphi) = R\,[1 + a_{20}Y_{20}(\theta,\varphi)],$$

wobei R der mittlere Radius und a_{20} der Deformationsparameter sind und

$$Y_{20}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta - 1).$$

(Symmetrieachse ist die z-Achse). Berechnen Sie das Quadrupolmoment $Q_{zz} = \int \rho(\vec{r})(3z^2 - r^2)\,{\rm d}\vec{r}$ des deformierten Kerns unter der Annahme, dass die Ladung homogen über das Volumen des Ellipsoids verteilt ist. Sie sollten hierbei eine Entwicklung in a_{20} bis einschließlich zur Ordnung $\mathcal{O}(a_{20}^2)$ vornehmen.

15. Kernspinresonanz

Das magnetische (Dipol-)Moment $\hat{\vec{\mu}}$ und der Spin-Operator $\hat{\vec{S}}$ eines Teilchens mit dem Spin $\frac{1}{2}$ seien verbunden durch

$$\hat{\vec{\mu}} = \gamma\hat{\vec{S}} = \mu_0\hat{\vec{\sigma}},$$

wobei γ das gyromagnetische Verhältnis und $\mu_0 \equiv \gamma\hbar/2$ ist. Wir wollen hier das durch Isidor Rabi eingeführte Prinzip der Messung von γ beschreiben.

Die übliche Darstellung der Pauli-Matrizen ist

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -{\rm i} \\ {\rm i} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Die Eigenzustände $|+\rangle$, $|-\rangle$ (in der Diracschen Bezeichnungsweise) der Operatoren $\hat{\vec{S}}^2$ und $\hat{S}_z$ bilden gemeinsam eine Basis der Spinzustände; diese Eigenzustände gehorchen den Gleichungen

$$\hat{S}_z|+\rangle = \frac{\hbar}{2}|+\rangle, \qquad \hat{S}_z|-\rangle = -\frac{\hbar}{2}|-\rangle, \qquad \hat{\vec{S}}^2|\pm\rangle = \frac{3\hbar^2}{4}|\pm\rangle$$

sowie $$\hat{S}_x|+\rangle = \frac{\hbar}{2}|-\rangle, \qquad \hat{S}_x|-\rangle = \frac{\hbar}{2}|+\rangle, \qquad \hat{S}_y|+\rangle = {\rm i}\frac{\hbar}{2}|-\rangle, \qquad \hat{S}_y|-\rangle = -{\rm i}\frac{\hbar}{2}|+\rangle$$

i. Spinpräzession in einem festen Magnetfeld

Wir betrachten zuerst die Präzession eines Teilchens mit dem Spin $\frac{1}{2}$ in einem konstanten und homogenen Magnetfeld $\vec{B}_0$ längs der z-Achse. Der entsprechende Hamilton-Operator ist[1]

[1]Die Spin- und Orts- bzw. Impulsfreiheitsgrade des Teilchens sind unabhängig voneinander, sodass wir nur den Spin-Teil des Hamilton-Operators in Betracht ziehen können.

$$\hat{H} = -\hat{\vec{\mu}} \cdot \vec{B}_0 = -\mu_0 B_0 \hat{\sigma}_z. \tag{2}$$

Es sei ein beliebiger Zustand $|\psi(t)\rangle$, der bei $t = 0$ die Bedingung $|\psi(0)\rangle = \alpha|+\rangle + \beta|-\rangle$ erfüllt, wobei α und β zwei komplexe Zahlen sind. Die spätere zeitliche Entwicklung des Zustands wird durch die zeitabhängige Schrödingergleichung mit dem Hamilton-Operator (2) gegeben, so dass

$$|\psi(t)\rangle = \alpha \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t/2}|+\rangle + \beta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t/2}|-\rangle \quad \text{mit} \quad -\frac{\mu_0 B_0}{\hbar} = \frac{\omega_0}{2}. \tag{3}$$

Zeigen Sie, dass der Erwartungswert $\langle \hat{\vec{\mu}} \rangle$ des magnetischen Dipolmoments lautet

$$\langle \hat{\mu}_x \rangle = 2\mu_0 \,\mathrm{Re}\,(\alpha^* \beta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}), \qquad \langle \hat{\mu}_y \rangle = 2\mu_0 \,\mathrm{Im}\,(\alpha^* \beta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}), \qquad \langle \hat{\mu}_z \rangle = \mu_0 \,(|\alpha|^2 - |\beta|^2).$$

Schreiben Sie die x- bzw. y-Komponente mithilfe der Amplitude C und der Phase ϕ der komplexen Zahl $\mu_0\, \alpha^* \beta$ um. Was für eine Bewegung hat die Projizierung von $\langle \hat{\vec{\mu}} \rangle$ auf die (x, y)-Ebene? Was für eine Bewegung hat $\langle \hat{\vec{\mu}} \rangle$?

ii. Überlagerung von einem festen und einem variablen Magnetfeld

Neben dem festen Magnetfeld $\vec{B}_0$ längs der z-Achse wird ein zweites schwächeres Magnetfeld $\vec{B}_1$ eingeführt, das in der (x, y)-Ebene mit der Kreisfrequenz ω rotiert; somit ist nun der Hamilton-Operator

$$\hat{H} = -\hat{\vec{\mu}} \cdot \left(\vec{B}_0 + \vec{B}_1(t)\right) = -\mu_0 B_0 \hat{\sigma}_z - \mu_0 B_1 \cos(\omega t)\, \hat{\sigma}_x - \mu_0 B_1 \sin(\omega t)\, \hat{\sigma}_y. \tag{4}$$

Die entsprechende Schrödingergleichung ergibt für die zeitliche Entwicklung des auf den Wert 1 normierten Zustands $|\psi(t)\rangle = a_+(t)|+\rangle + a_-(t)|-\rangle$ die differentiellen Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}a_+}{\mathrm{d}t} &= \frac{\omega_0}{2}\, a_+(t) + \frac{\omega_1}{2}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} a_-(t) \\ \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}a_-}{\mathrm{d}t} &= \frac{\omega_1}{2}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} a_+(t) - \frac{\omega_0}{2}\, a_-(t), \end{aligned} \tag{5}$$

wobei $\mu_0 B_1/\hbar = -\omega_1/2$.

Zeigen Sie, dass das Ersetzen der Funktionen $a_\pm(t)$ durch $b_\pm(t) \equiv \exp(\pm \mathrm{i}\omega t/2)\, a_\pm(t)$ zu den einfacheren folgenden Gleichungen führt:

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}b_+}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\omega - \omega_0}{2}\, b_+(t) + \frac{\omega_1}{2}\, b_-(t) \\ \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}b_-}{\mathrm{d}t} &= \frac{\omega_1}{2}\, b_+(t) + \frac{\omega - \omega_0}{2}\, b_-(t). \end{aligned}$$

Prüfen Sie, dass dies impliziert

$$\frac{\mathrm{d}^2 b_\pm}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{\Omega}{2}\right)^2 b_\pm(t) = 0 \quad \text{mit} \quad \Omega^2 \equiv (\omega - \omega_0)^2 + \omega_1^2. \tag{6}$$

Der Spin sei bei $t = 0$ im $|+\rangle$ Zustand, was $b_-(0) = a_-(0) = 0$ entspricht. Was sind die normierten Lösungen von Gl. (6)? Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, den Wert $-\hbar/2$ bei einer Messung von $\hat{S}_z$ um t zu finden, lautet

$$\mathcal{P}_{+\to-}(t) = \left(\frac{\omega_1}{\Omega}\right)^2 \sin^2 \frac{\Omega t}{2}.$$

Diskutieren Sie dieses Ergebnis für verschiedene Werte von ω: Warum erlaubt die Messung der Wahrscheinlichkeit des $|+\rangle \to |-\rangle$-Übergangs eine präzise Bestimmung der *Larmorfrequenz* ω_0 und hierbei (bei bekanntem Magnetfeld B_0) des gyromagnetischen Faktors γ?

Mithilfe dieses Verfahrens verbesserte Isidor Rabi die Präzision der Messungen von γ-Werten um einen Faktor $\approx 10^3$! Dann kamen Felix Bloch & Edward Purcell...

iii. Wenn Sie Zeit haben... können Sie noch die zeitlichen Entwicklungen (3) und (5) herleiten! Was ist die physikalische Deutung der Umwandlung von den Funktionen $a_\pm$ zu den Funktionen $b_\pm$?