Übung Nr. 5

Diskussionsthemen:

- Welche experimentelle Beobachtungen führen zur Idee eines Schalenmodells des Atomkerns?
- Wie werden die Energieniveaus eines Nukleons in einem Kastenpotential hergeleitet?

11. Kugelflächenfunktionen

In der Vorlesung wurden die Kugelflächenfunktionen

$$Y_{\ell m}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}(-1)^m \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} P_\ell^{(m)}(\cos\theta)$$

$$\text{mit}\quad P_\ell^{(m)}(x) = \frac{(-1)^m}{2^\ell \ell!}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}(1-x^2)^{-m/2}\frac{\mathrm{d}^{\ell-m}}{\mathrm{d}x^{\ell-m}}(x^2-1)^\ell$$

eingeführt, wobei $0 \leq m \leq \ell$. Die $P_\ell^{(m)}$ sind die sog. *zugeordneten Legendre-Polynome*.

i. Zeigen Sie explizit, dass die $Y_{\ell m}$ Eigenfunktionen des Paritätsoperators $\mathcal{P}$ sind.[1]

ii. Der Bahndrehimpuls in Kugelkoordinaten ist gegeben durch

$$L_x = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\left(-\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cos\varphi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right), \qquad L_y = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \sin\varphi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right), \qquad L_z = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Leiten Sie hieraus $\vec{L}^2$ ab. Die $Y_{\ell m}$ sind als Eigenfunktionen von L_z und $\vec{L}^2$ konstruiert. Berechnen Sie $L_z Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$ und $\vec{L}^2 Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$ explizit, wobei Sie benutzen können, dass die $P_\ell^{(m)}$ Lösungen der sog. *verallgemeinerten Legendre-Gleichung* sind:

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left((1-z^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right) + \ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-z^2}\right]P_\ell^{(m)}(z) = 0.$$

iii. Zeigen Sie mittels dieser Ergebnisse, dass die Eigenfunktionen von L_z und $\vec{L}^2$ eine eindeutig bestimmte Parität haben. Wie folgt dies auch einfach aus der Definition des Drehimpulsoperators $\vec{L} = -\mathrm{i}\hbar\,\vec{r}\times\vec{\nabla}$?

12. Harmonischer Oszillator als Kernpotential

In der Vorlesung wurde das Potential des dreidimensionalen harmonischen Oszillators

$$V(r) = -V_0\left[1 - \left(\frac{r}{R_0}\right)^2\right]$$

als mögliches Kernpotential erwähnt.

i. Betrachten Sie den der kinetischen Energie entsprechenden Operator und den dreidimensionalen harmonischen Oszillator in kartesischen Koordinaten: Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion in drei Teile faktorisiert werden kann. Berechnen Sie die betreffenden Energieniveaus in Abhängigkeit von der „Null-Energie“ V_0 bzw. der Kreisfrequenz $\omega \equiv (2V_0/mR_0^2)^{1/2}$ und von drei Quantenzahlen n_1, n_2, n_3, wobei m die Masse des im Potentialtopf eingeschlossenen Teilchens bezeichnet.
(Wichtiger Tipp: Sie brauchen die Eigenfunktionen des Hamilton-Operators nicht! Erinnerungen an die Theorie II Vorlesung helfen.)

[1] Die *Parität* ist eine Quantenzahl, die das Verhalten eines Zustands unter einer Spiegelung des Koordinatensystems am Ursprung $\vec{r} \to -\vec{r}$ beschreibt; vgl. Theorie II.

ii. Löst man das Problem in Kugelkoordinaten (was wir hier nicht tun wollen), findet man für das Oszillatorpotential folgenden Ausdruck für äquidistante Energieniveaus:

$$E_{n,\ell} = \hbar\omega \left[2(n-1) + \ell + \frac{3}{2} \right], \qquad \text{mit} \ \ \omega^2 = \frac{2V_0}{mR_0^2},$$

wobei $n = 1, 2, \ldots, \ \ell = 0, 1, \ldots$.
Welchen Entartungsgrad weisen die Energieniveaus auf? Berechnen Sie diesen explizit für die ersten 6 Energieniveaus. Welche sind die entsprechenden „magischen Zahlen“?

iii. Welche Parität haben die Energieniveaus jeweils?