

## Übung Nr. 4

**Diskussionsthema:** Auf welchen Ideen beruht die Beschreibung des Kerns als ein Fermi-Gas?

### 8. Fermi-Gas: Weiße Zwerge

Weiße Zwerge sind kleine Sterne, die aus Materie mit einem entarteten Elektronengas bestehen. Sie weisen eine hohe Dichte auf: ihre Masse ist vergleichbar mit der Sonnenmasse, während ihr Volumen  $V$  vergleichbar mit jenes der Erde ist. Weiße Zwerge können entstehen, wenn der Fusionsprozess im Inneren eines der Sonne ähnlichen Sterns zum Erliegen gekommen ist, somit der Stern der Gravitationswirkung nichts mehr entgegenzusetzen kann. (Die Masse des Sterns genügt allerdings nicht, um einen Neutronenstern zu erzeugen).

Die Elektronen können mittels eines Fermi-Gases beschrieben werden und ihre Fermi-Energie lautet (der Entartungsgrad der Spins ist 2)

$$E_F = \left(3\pi^2 \frac{\mathcal{N}_e}{V}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{2m_e}, \quad (1)$$

wobei  $\mathcal{N}_e$  die Zahl der Elektronen im Weißen Zwerg bezeichnet.

Der Einfachheit halber wird angenommen, dass alle Kerne im Weißen Zwerg gleich aufgebaut sind, somit die Nukleonen- bzw. Protonenzahl pro Kern  $A$  bzw.  $Z$  fest ist.

- i. Ermitteln Sie die Masse  $M$  des Weißen Zwergs und die Zahl seiner Elektronen in Abhängigkeit von der Gesamtzahl der Nukleonen  $\mathcal{N}_N$ .
- ii. Berechnen Sie die Gesamtenergie  $E(R)$  des Weißen Zwergs in Abhängigkeit seines Radius  $R$ . Diese besteht aus zwei Beiträgen: der kinetischen Energie, zu der fast nur die Elektronen beitragen (durchschnittliche kinetische Energie pro Elektron:  $\langle E \rangle = \frac{3}{5} E_F$ ) und der Gravitationsenergie. Leiten Sie die Gravitationsenergie  $E_G$  analog zur Betrachtung in der Vorlesung bezüglich der potentiellen elektrostatischen Energie einer homogen geladenen Kugel her.
- iii. Ermitteln Sie den Gleichgewichtsradius  $R_{\text{eq}}$ , für den die Energie  $E(R)$  minimal wird.
- iv. Die Masse der Sonne ist  $1 M_\odot = 1,99 \cdot 10^{30}$  kg. Für einen typischen Weißen Zwerg ist außerdem  $Z = \frac{1}{2}A$ . In etwa 5-6 Milliarden Jahre verwandelt sich unsere Sonne von einem Roten Riesen in einen Weißen Zwerg: Wie groß ( $R_{\text{eq}}$ ) wird sie dann sein und welche Dichte wird sie haben?
- v. Die Temperatur im Zentrum eines typischen Weißen Zwergs ist etwa  $10^7$  K. Der Ausdruck (1) der Fermi-Energie beruht auf der Annahme eines Fermi-Gases nicht-relativistischer<sup>1</sup> Elektronen bei Null-Temperatur. Ist diese Annahme begründet?

### 9. Fermi-Gas: Neutronensterne

Nach dem Verbrauch ihres nuklearen „Brennstoffs“ kollabieren Sterne mit einer Masse von etwa  $10 M_\odot$  zu Neutronensternen. Der Einfachheit halber wird hier angenommen, dass diese ausschließlich aus entarteten Neutronen bestehen.

- i. Die Teilchendichte in einem Neutronenstern ist vergleichbar mit jener im Zentrum eines Kerns ( $n_\infty = 0,17$  Nukleonen/fm<sup>3</sup>) und die typische Temperatur ist  $T \approx 10^8$  K. Zeigen Sie, dass der Neutronenstern als ein Fermi-Gas von nicht-relativistischen<sup>1</sup> Neutronen bei Null-Temperatur beschrieben werden kann.

Es sei dann  $E_F = \left(3\pi^2 \frac{\mathcal{N}_n}{V}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{2m_n}$  die betreffende Fermi-Energie, wobei  $\mathcal{N}_n$  die Zahl von Neutronen

---

<sup>1</sup>d.h. kinetische Energie  $\ll$  Massenenergie

ist.

ii. Analog zu den Fragen ii. & iii. in Übung 8, wie lautet der Gleichgewichtsradius  $R_{\text{eq}}$  eines Neutronensterns? Berechnen Sie den Wert dieses Radius sowie die entsprechende Teilchendichte für einen Neutronenstern mit der Masse  $M = 1,4 M_{\odot}$ .

### 10. Kern als einzel- oder zwei-komponente Fermi-Gas

Berechnen Sie die Gesamtenergie (ohne Ruhemasse) des Atomkerns  ${}^{107}_{47}\text{Ag}$ , einerseits unter der Annahme, dass Protonen und Neutronen voneinander verschieden sind, andererseits dass sie nicht verschieden sind, und vergleichen Sie beide Resultate. Berechnen Sie auch explizit  $\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_p + \mathcal{E}_n - \mathcal{E}_N$ . Wie gut ist die in der Vorlesung betrachtete Entwicklung?