

Übung Nr. 2

2. Rutherfordsche Streuformel

In der Vorlesung wurde die Rutherfordsche Streuformel

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{punkt}}(\theta) = \frac{1}{16} \left(\frac{ZZ'e^2}{4\pi\epsilon_0 E_{\text{kin}}}\right)^2 \frac{1}{\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^4} \quad (1)$$

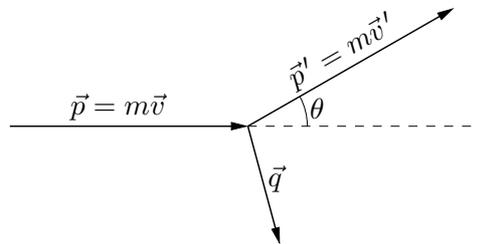
für die Streuung an einem punktförmigen Ziel mit der Ladung $Z'e$ hergeleitet.

i. Zeigen Sie durch ein einfaches Argument, dass der entsprechende totale Wirkungsquerschnitt σ_{tot} divergiert. Der Grund dafür ist, dass das durch eine isolierte elektrische Ladung erzeugte Coulomb Potential $V_{\text{Coul}}(r)$ eine unendliche Reichweite hat (d.h. $\lim_{r \rightarrow \infty} r V_{\text{Coul}}(r) \neq 0$).

ii. In einem Atom wird die positive Ladung des Kerns für große Abstände durch die negativ geladenen Elektronen abgeschirmt, so dass die effektive Reichweite des elektrischen Potentials des Kerns dennoch begrenzt ist. Wie groß ist der totale Wirkungsquerschnitt im Fall der Streuung von α -Teilchen mit $E_{\text{kin}} = 5,5 \text{ MeV}$ an Gold-Atomen, wenn Sie annehmen, dass für einen Stoßparameter b größer als der Atomradius $R_{\text{Au}} = 1,35 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ keine Streuung mehr erfolgt?

iii. Berechnen Sie den minimalen Abstand r_{min} eines α -Teilchens auf der Sonnenoberfläche (kinetische Energie $E_{\text{kin}} = \frac{3}{2}k_B T$, wobei $T \simeq 5800 \text{ K}$) bei Streuung an einem Kohlenstoffatom $^{12}_6\text{C}$. (Der Einfachheit halber wird angenommen, dass E_{kin} die kinetische Energie im Schwerpunktsystem des α - $^{12}_6\text{C}$ Paars ist.) Wie heiß müsste es mindestens sein, damit sich die Kerne berühren? Benutzen Sie für den Kernradius $R = 1,3A^{1/3}$.

iv. Zur Beschreibung einer Streuung wird oft der Impulsübertrag $\vec{q} = \vec{p} - \vec{p}'$ eingeführt:



Zeigen Sie (Tipp: die Streuung ist elastisch!), dass eine andere Schreibweise der Rutherfordschen Streuformel (1) lautet

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{punkt}}(\vec{q}) = \frac{(2ZZ'\alpha m)^2}{q^4}, \quad (2)$$

wobei $\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \simeq \frac{1}{137}$ die elektromagnetische Feinstrukturkonstante ist.

(In Gl. (2) wird das System „natürlicher“ Einheiten mit $\hbar = c = 1$ benutzt.)

3. Elektrischer Formfaktor

Im Fall der Streuung elektrischer Ladungen an einem ausgedehnten geladenen Target wird der sogenannte elektrische Formfaktor $F^2(\vec{q})$ eingeführt, wobei \vec{q} der Impulsübertrag ist (s. Übung 2.iv).

$F^2(\vec{q})$ ist¹ der quadrierte Betrag der Fourier-Transformierten der Ladungsdichteverteilung $\rho(\vec{r})$:

$$F^2(\vec{q}) \equiv \left| \frac{1}{Z'e} \int d^3\vec{r} \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar} \right|^2, \quad (3)$$

und der differentielle Wirkungsquerschnitt lautet dann

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vec{q}) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{punkt}}(\vec{q}) \cdot F^2(\vec{q}).$$

- i. Was ist der elektrische Formfaktor eines Punktteilchens?
- ii. Zeigen Sie, dass im Fall einer kugelsymmetrischen Ladungsdichteverteilung $\rho(r)$ die Gl. (3) gibt

$$F^2(\vec{q}) = \left| \frac{1}{Z'e} \int_0^{+\infty} \rho(r) \frac{\sin(qr/\hbar)}{qr/\hbar} 4\pi r^2 dr \right|^2.$$

- iii. Berechnen Sie den Formfaktor einer Gaußschen Ladungsverteilung $\rho(r) = \rho_0 \left(\frac{a^2}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-a^2 r^2/2}$.

4. Woods–Saxon Verteilung

Die Woods–Saxon (Ladungsdichte-)Verteilung ist gegeben durch

$$\rho(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{1 + e^{\frac{r-R_{1/2}}{z}}},$$

wobei z die Breite des Kernrands bestimmt.

- i. Ermitteln Sie über welche Distanz (in Einheiten von z) die Ladungsdichte von 80% auf 20% absinkt.
- ii. Berechnen Sie den Wert der Verteilung im Zentrum des Kerns in der Näherung $z \ll R_{1/2}$.

¹bis auf einen Faktor $\frac{1}{Z'^2 e^2}$