

I.2.4 Dichteveteilungen von Atomkernen

I.2.4 a Ladungsdichteveerteilung

Zur Beschreibung eines ausgedehnten elektrisch geladenen Bereichs, insbesondere eines Atomkerns, ist mehr als seine Gesamtladung Q erforderlich. Die ganze nötige Information ist in der *elektrischen Ladungsdichteveerteilung*^(xxi) $\rho_{\text{el}}(\vec{r})$ enthalten, die so definiert ist, dass das Produkt $\rho_{\text{el}}(\vec{r}) d^3\vec{r}$ die Ladung im Volumenelement $d^3\vec{r}$ um den Punkt \vec{r} darstellt. Integriert über den ganzen Raum soll die Ladungsdichteveerteilung die gesamte Ladung Q ergeben, entsprechend der Normierung

$$\int \rho_{\text{el}}(\vec{r}) d^3\vec{r} = Q. \quad (\text{I.18})$$

Experimentell liefern differentielle Wirkungsquerschnitte nicht genau $\rho_{\text{el}}(\vec{r})$, sondern das Betragsquadrat deren Fourier^(p)-Transformierten, Gl. (I.17). Solche Wirkungsquerschnitte für Streuungen verschiedener elektrisch geladener Projektile — insbesondere von Elektronen, die der starken

^(xx)electric form factor ^(xxi)electric charge distribution

^(p)J. FOURIER, 1768–1830

Wechselwirkung nicht unterliegen — an unterschiedlichen Atomkernen wurden sorgfältig gemessen, z.B. durch R. Hofstadter^(q) und seine Mitarbeiter⁽¹⁰⁾ woraus sich die elektrischen Formfaktoren der Kerne durch Gl. (I.16) gewinnen lassen. Aus $F^2(\vec{q})$ ergibt sich dann die Ladungsdichteverteilung jedes einzelnen Kerns.

Für „leichte“ Atomkerne mit Massenzahl $A < 20$ lassen sich die so erhaltenen Ladungsdichte-Verteilungen in erster Näherung günstig mit Gaußschen^(r) Verteilungen

$$\rho_{\text{el.}}(\vec{r}) = \rho_0 \left(\frac{1}{\pi R^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-r^2/R^2} \quad (\text{I.19})$$

anpassen, wobei wie üblich $r \equiv |\vec{r}|$.

Zur Beschreibung des elektrischen Formfaktors bei schwereren Kernen mit $A \geq 20$ und Ladung Ze wird die in Abb. I.10 dargestellte *Woods–Saxon*^(s)-Verteilung

$$\rho_{\text{el.}}(\vec{r}) = \frac{\rho_\infty(Z, A)}{1 + \exp\left(\frac{r - R_{1/2}}{\delta}\right)} \quad (\text{I.20})$$

benutzt, die man in der Literatur auch unter den Bezeichnungen *Fermi*^(t)-Verteilung — denn sie ist ähnlich der Fermi–Dirac^(u)-Verteilung der statistischen Physik — oder sogar *Zwei-Parameter-Fermi-Verteilung*⁽¹¹⁾ (2pF) findet.

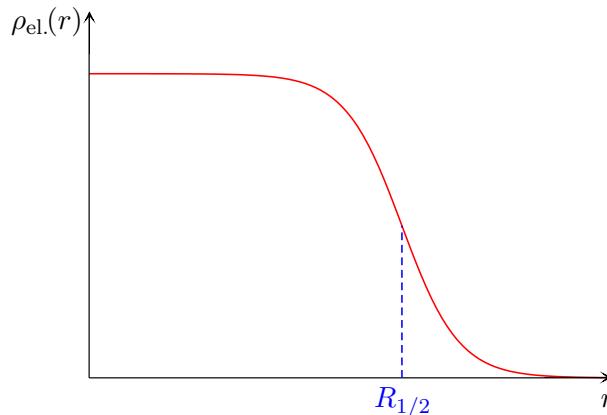


Abbildung I.10 – Verlauf einer Woods–Saxon-Verteilung (I.20).

Dabei hängen die Parameter wie folgt von Massen- und Ladungszahl ab.⁽¹²⁾

- $\rho_\infty(Z, A) = 0,17 Ze/A \text{ C fm}^{-3}$ ist ungefähr gleich der Ladungsdichte im Zentrum des Kerns;
- der *Halbdichteradius*^(xxii) $R_{1/2}$ — entsprechend dem Abstand bei welchem die Ladungsdichte auf $\frac{1}{2}\rho_\infty(Z, A)$ d.h. etwa die Hälfte ihres Werts im Zentrum abgefallen ist — nimmt mit der Massenzahl A zu;
- die Dicke δ der Randzone (*Oberflächendicke*) kann als unabhängig vom Kern angenommen werden, $\delta = 0,545 \text{ fm}$.

Bemerkungen:

* Für einige Atomkerne, deren Ladungsdichte ein lokales Minimum im Zentrum aufzeigt, wird noch eine Drei-Parameter-Fermi-Verteilung (3pF) eingeführt, wobei der Zähler der Verteilung (I.20) mit

⁽¹⁰⁾Vgl. Experimente 19–20 in Ref. [7] sowie Ref. [15].

⁽¹¹⁾Die Zwei Parameter der Bezeichnung sind $R_{1/2}$ und δ .

⁽¹²⁾Eine nützliche Erfassung von Parametrisierungen der Ladungsdichteverteilungen verschiedener stabiler Atomkerne befindet sich in Ref. [16].

^(xxii)half-density radius

^(q)R. HOFSTADTER, 1915–1990 ^(r)C. F. GAUSS, 1777–1855 ^(s)D. S. SAXON, 1920–2005 ^(t)E. FERMI, 1901–1954

^(u)P. A. M. DIRAC, 1902–1984

einem Faktor $1 + w(R/R_{1/2})^2$ multipliziert wird, mit dem zusätzlichen Parameter w . Dabei ist $R_{1/2}$ aber nicht mehr der Abstand, bei dem ρ_{el} die Hälfte des Werts bei $r = 0$ annimmt.

* Die oben angegebenen Ladungsdichteveerteilungen (I.19)–(I.20) beschreiben offensichtlich kugelsymmetrische Kerne, denn die Verteilungen hängen nur vom Abstand zum Kernzentrum r ab. Wie im § I.4.3 hiernach detaillierter diskutiert wird, ist diese Annahme für den großen Teil der stabilen Kerne eine gute Näherung. Bei manchen sog. *deformierten* Kernen treten jedoch erhebliche Abweichungen von der Kugelsymmetrie auf, z.B. bei Uran. Dann ist z.B. ein Umdrehungsellipsoid eine bessere Approximation an der (durch die Ladungsverteilung dargestellten) Gestalt des Kerns.

Diese Deformationen lassen sich nicht aus den hier beschriebenen elastischen Streuexperimenten gewinnen, weil die „Orientierung“ des Atomkerns im Raum — z.B. die Richtung dessen langen Achse, falls es sich um einen prolaten Kern handelt — in den Experimenten nicht festgelegt wird, sondern zufällig ist. Dann ändert sich diese Orientierung bei jedem einzelnen Projektil-Kern-Streuereignis, so dass der aus vielen Ereignissen erhaltene Wirkungsquerschnitt eine Mittelung über alle möglichen Orientierung darstellt.

I.2.4 b Kernradien

Aus Streuungen bei kleinen Impulsüberträgen $|\vec{q}|$ lässt sich tatsächlich nur der quadratisch gemittelte^(xxiii) Radius gewinnen:⁽¹³⁾

$$R_{\text{rms}}^2 \equiv \frac{\int r^2 \rho_{\text{el}}(\vec{r}) d^3\vec{r}}{\int \rho(\vec{r})_{\text{el}} d^3\vec{r}} \equiv \langle \vec{r}^2 \rangle.$$

Dieser Radius R_{rms} stimmt weder mit dem Parameter R der Gaußschen Verteilung (I.19) noch mit dem Halbdichteradius $R_{1/2}$ der Woods–Saxon-Verteilung (I.20) überein.

Oft gibt man anstatt R_{rms} den äquivalenten Radius R_e einer homogen geladenen Kugel mit demselben $\langle r^2 \rangle$ an, d.h. $R_e^2 = \frac{5}{3} R_{\text{rms}}^2$. Experimentell gilt $R_e \simeq r_0 A^{1/3}$ mit $r_0 = 1,3 \pm 0,1 \text{ fm}$.

Schließlich wird noch ein zusätzlicher Radius eingeführt: R_s ist der äquivalente Radius einer homogen geladenen Kugel, die überall die Ladungsdichte $\rho_\infty(Z, A)$ hat, so dass $Ze = \frac{4}{3}\pi R_s^3 \rho_\infty(Z, A)$. Mit dem oben gegebenen experimentell gewonnenen Wert für $\rho_\infty(Z, A)$ ist $R_s = 1,128 A^{1/3} \text{ fm}$.

Bemerkungen:

- * Der Definition nach ist R_s genau proportional zu $A^{1/3}$ für alle Atomkerne, während die entsprechende Proportionalität für $R_{1/2}$ oder R_e nur annähernd ist.
- * Durch das Ersetzen von einem Elektron eines Atoms durch ein Myon — Elementarteilchen mit elektrischer Ladung $-e$ und Masse $m_\mu \simeq 207 m_e$ — wird ein myonisches Atom erzeugt. Wegen seiner viel größeren Masse ist das Myon stärker gebunden am Kern als ein Elektron, sodass seine Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Inneren des Atomkerns groß wird. Beispielsweise beträgt der Bohrsche Radius der Myonenbahn um einen Blei-Kern etwa 3 fm, im Vergleich mit dem Kernradius $R_s \simeq 7 \text{ fm}$. Somit spürt das Myon während eines großen Teils seiner Bahn ein schwächeres Coulomb-Potential, als wenn der Kern punktförmig wäre, was seine Bindungsenergie verringert. Folglich liefert die Messung der Bindungsenergie des Myons eine Abschätzung des Kernradius [17] — oder genauer von R_{rms} .

⁽¹³⁾ Die Taylor^(v)-Entwicklung des Formfaktors (I.17) bei $\vec{q} = \vec{0}$ gibt nämlich $F^2(\vec{q}) = \left| 1 + i \frac{\vec{q} \cdot \langle \vec{r} \rangle}{\hbar} - \frac{\langle \vec{r}^2 \rangle}{6\hbar^2} |\vec{q}|^2 + \dots \right|^2$, wobei der lineare Term für eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung verschwindet.

^(xxiii) root mean square = rms

^(v) B. TAYLOR, 1685–1731

I.2.4 c Kerndichteverteilung

Der große Vorteil der Streuexperimente von Elektronen an Kernen besteht darin, dass dabei die einzige relevant Wechselwirkung zwischen Projektil und Target die gut bekannte elektromagnetische Wechselwirkung ist. Andererseits sind solche Streuungen nur gegenüber der Verteilung der elektrisch geladenen Protonen empfindlich, liefern aber keine Auskunft über die Neutronen.⁽¹⁴⁾

Kollisionen von relativistischen Protonen mit kinetischer Energie $E_{\text{kin}} \approx 1 \text{ GeV}$ ermöglichen jedoch die Messung der gesamten Teilchendichteverteilung im Kern unter Berücksichtigung der elektromagnetischen Kraft zwischen dem gestreuten Proton und denjenigen im Kern, deren Verteilung unabhängig durch Elektronenstreuung messbar ist [17]. Somit erhält man auch die Verteilung der Neutronen. Bei Kernen in der Nähe des β -Stabilitätslinie (s. Abschn. ??) und einem geringen Neutronenüberschuss wird in guter Näherung kein Unterschied zwischen den Protonen- und Neutronenverteilungen beobachtet.

Anhand neuerer Methoden — Paritätsverletzende Elektronstreuung [18] oder die Photoerzeugung von π^0 -Mesonen [19] — wurde eine kleine „neutron skin“, entsprechend einem größeren Radius für die Verteilung von Neutronen als für jene von Protonen, im neutronenreichen ^{208}Pb -Atomkern beobachtet, wobei die Differenz der Radien je nach dem Experiment zwischen etwa 0.15 und 0.3 fm beträgt.

In Zusammenfassung ist die Nukleonendichte in einem nicht-deformierten stabilen Atomkern mit $A \gtrsim 20$ in guter Näherung durch

$$n(\vec{r}) = \frac{n_\infty}{1 + \exp\left(\frac{r - R_{1/2}}{\delta}\right)} \quad (\text{I.21})$$

gegeben, wobei $R_{1/2}$ mit der Massenzahl A zunimmt, während n_∞ , entsprechend ungefähr der Teilchendichte im Kernzentrum, unabhängig von A ist: $n_\infty = 0,17 \text{ Nukleon/fm}^3$, was zum oben angegeben Wert von $\rho_\infty(Z, A)$ [s. unter Gl. (I.20)] führt. n_∞ wird *Sättigungsdichte*^(xxiv) genannt.

Bemerkung: Da die Masse eines Nukleons etwa $1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ beträgt, vgl. § I.5.2 und I.5.3, entspricht n_∞ einer Massendichte von $2,8 \cdot 10^{17} \text{ kg m}^{-3}$.

I.2.4 d Weitere Bemerkungen

In diesem Abschnitt wurden (beinahe) sphärische Atomkerne betrachtet, entsprechend der angenommenen Kugelsymmetrie der Dichteverteilungen (I.19), (I.20) oder (I.21), die nur von $r = |\vec{r}|$ abhängen. Manche Nuklide sind aber „deformiert“, sogar im Grundzustand, was bedeutet, dass ihre Gestalt stark von derjenigen einer Kugel abweicht. Experimentell spiegeln sich solche Abweichungen von der Kugelsymmetrie in Momenten der Ladungsdichteverteilung wider (§ I.4.3 a).

Die oben beschriebene Methode zur Messung der (Ladungs-)Dichteverteilung eines Kerns mit Hilfe von Streuexperimenten beruht stillschweigend auf der Annahme, dass der zu messende Atomkern lange genug lebt, um als Ziel benutzt zu werden. Bei manchen Nukliden ist diese Annahme nicht erfüllt, insbesondere bei denjenigen, die in der Nähe der Grenzen des Stabilitätsbereichs liegen.

Solche Kerne, wenn sie sehr neutronenreich bzw. protonenreich sind, besitzen manchmal seltene Zerfallsarten durch die gleichzeitige Emission zweier Neutronen bzw. Protonen (§ ??). Durch eine sorgfältige Analysis der gemessenen Kinematik der Zerfallsprodukte kann Information über die Struktur des zerfallenden Kerns gewonnen werden. Somit wurde bei einigen Kernen ungewöhnlich langreichweitige Dichteverteilungen entdeckt: dabei bewegen sich ein paar Neutronen bzw. Protonen im Mittel sehr weit vom Kernzentrum — sollte man schreiben, weit vom Kern des Atomkerns? — und bilden somit eine Art „Halo“ um den Rest der Nukleonen [20]. Beispiele solcher sog. *Halo-Kerne* sind $^{11}_3\text{Li}$ (Halo aus zwei Neutronen) oder $^{8}_5\text{B}$ (Halo aus einem einzelnen Proton).

⁽¹⁴⁾ Eigentlich erzeugen die magnetischen Dipolmomente der Neutronen Dipolfeldpotentiale, deren Stärke aber viel kleiner ist, als jene des durch die Protonen erzeugten Coulomb-Potentials.

^(xxiv) saturation density

In der Kernphysik sind Dichteverteilungen, wie die Wirkungsquerschnitte, statistische Größen, gewonnen aus der Wiederholung vieler identischer Experimente. Dementsprechend können sie als (unnormierte) Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen interpretiert werden: die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Nukleon im Volumenelement $d^3\vec{r}$ um den Punkt \vec{r} befindet, ist proportional⁽¹⁵⁾ zum Produkt $n(\vec{r}) d^3\vec{r}$, mit n der Nukleonendichteverteilung im Kern. In Übereinstimmung mit dieser Interpretation ist $n(\vec{r})$ in quantenmechanischen Modellierungen des Atomkerns proportional zum Betragsquadrat der Wellenfunktion der A Nukleonen des Kerns.

Dagegen ist die eigentliche Verteilung der Nukleonen in einem gegebenen Kern zu einem gegebenen Zeitpunkt nicht durch $n(\vec{r})$ gegeben, sondern durch die Summe über alle Nukleonen von $\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_i(t))$ -Terminen, wobei $\vec{r}_i(t)$ die Position zur Zeit t des i -ten Nukleons bezeichnet.

I.3 Masse des Atomkerns

Eine zweite Grundeigenschaft von Atomkernen, neben ihrer Größe, ist ihre Masse, deren Messung für eine gegebene relative Genauigkeit in der Tat einfacher ist. Eigentlich spielt die Masse des Kerns schon eine Rolle in der Bestimmung des Radius, denn sie legt die reduzierte Masse für das äquivalente Ein-Körper-Problem für die Streuung eines Projektils am Kern fest. Dazu stellt sich die Masse als wichtig heraus, weil sie Auskunft über die Stabilität des Nuklids gibt.

Bemerkung: Hiernach bezeichnet $m(Z, N)$ bzw. $m(Z, A)$ die Masse der „nackten“ Atomkernen, d.h. von völlig ionisierten Atomen. In manchen Lehrbüchern wird an deren Stelle die Masse $m'(Z, A)$ des Atoms, einschließlich der Z Elektronen, verwendet. Dies führt zu einigen Unterschieden, die im Folgenden rechtzeitig diskutiert werden.

I.3.1 Grundlagen der Massenmessung

Die ersten Messungen der Masse des Atomkerns fanden parallel zu dessen Nachweis statt und führten schnell zur Entdeckung der Existenz von Isotopen (J. J. Thomson 1912) und zu ihrer systematischen Untersuchung (Aston^(w) 1919, vgl. Experiment 9 in Ref. [7]).

Die meisten frühen Methoden zur Massenbestimmung beruhen auf demselben einfachen Grundprinzip, das in mehreren Messapparaten — Massenspektrometer bzw. Massenspektrographen — implementiert wurden, insbesondere durch Mattauch.^{(x)(16)} Dabei fliegt der Kern durch zwei aufeinanderfolgende Filter, die seine kinetische Energie E_{kin} (Energiefilter) und seinen Impuls $|\vec{p}|$ (Impulsfilter) präzis auswählen, wie unten schematisch dargestellt wird. Dann wird die Masse einfach durch $m = |\vec{p}|^2/2E_{\text{kin}}$ — im nicht-relativistischen Fall — gegeben (vgl. Experiment 26 in Ref. [7]).



Der Ablenkwinkel ϑ der Flugrichtung des Kerns (Ladung q) am Ausgang des Gebiets (Länge L , gleichmäßiges elektrisches Feld \vec{E}_1 , verschwindendes magnetisches Feld \vec{B}_1) ist gegeben durch

$$\tan \vartheta = \frac{q\vec{E}_1 L}{2mv^2} = \frac{q\vec{E}_1 L}{4E_{\text{kin}}}.$$

⁽¹⁵⁾ Der Proportionalitätsfaktor ist einfach $1/A$, denn $n(\vec{r})$ ist auf die Nukleonenzahl A des Kerns normiert.

⁽¹⁶⁾ Vgl. Ref. [21, Kap. 3] für einen Überblick über verschiedene Methoden und die entsprechenden Messapparate.

^(w) F. ASTON, 1877–1945 ^(x) E. MATTAUCH, 1895–1976

Der Ablenkwinkel ϕ am Ausgang des Gebiets (Länge L' , elektrisches Feld $\vec{E}_2 = \vec{0}$, gleichmäßiges magnetisches Feld \vec{B}_2) ist gegeben durch

$$\sin \phi = \frac{q\vec{B}_2 L'}{mv} = \frac{q\vec{B}_2 L'}{|\vec{p}|}.$$

Mit solchen Methoden werden relative Genauigkeiten von etwa 10^{-4} – 10^{-5} erreicht. Genauere Messungen sind mit sog. *Flugzeitmassenspektrometern* nötig: dabei werden die Kerne in einem Bereich (Länge L) durch eine konstante Spannung beschleunigt, und die Zeit zum Durchlaufen des Gebiets liefert das Masse-zu-Ladung-Verhältnis m/q .

Um eine noch höhere Genauigkeit zu erreichen sind andere Messmethoden nötig [22], wie z.B. die Verwendung einer Penning^(y)-Falle (vgl. Ref. [23] und das darin enthaltene Literaturverzeichnis).

I.3.2 Bindungsenergie

Die Masse eines Nuklids mit A Nukleonen ist ungefähr proportional zu A — was die Bezeichnung „Massenzahl“ rechtfertigt —, entsprechend den fast gleichen Massen von Proton und Neutron (vgl. § I.5.2 und I.5.3).

Genauer ist die Masse $m(Z, N)$ eines *gebundenen* Atomkerns mit Z Protonen und N Neutronen immer kleiner als die Summe der Massen seiner Bausteine:

$$m(Z, N) = Zm_p + Nm_n - \Delta m(Z, N), \quad (\text{I.22})$$

wobei m_p bzw. m_n die Masse des Protons bzw. Neutrons bezeichnet und $\Delta m(Z, N) > 0$ der sog. *Massendefekt*^(xxv) ist. Indem die Neutronenzahl N durch $A - Z$ ersetzt wird, erhält man die alternative Schreibweise

$$m(Z, A) = Zm_p + (A - Z)m_n - \Delta m(Z, A). \quad (\text{I.23})$$

^(xxv)mass defect

^(y)F. M. PENNING, 1894–1954