

I.2.2 „Rutherfordsches“ Streuexperiment und Entdeckung des Atomkerns

Ein wichtiges Beispiel von Anwendung der klassischen Streutheorie ist die elastische Streuung von elektrischen Punktladungen q mit Masse m an einem punktförmigen Ziel mit der elektrischen Ladung Q und einer sehr viel größeren Masse.

In diesem Fall herrscht zwischen den an den Stoß teilnehmenden Teilchen die elektromagnetische Wechselwirkung. Genauer unterliegen die Projektile der Coulomb-Kraft

$$\vec{F}_{\text{Coul}} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \quad (\text{I.7})$$

mit dem Abstand r zum Ziel und dem radialen Einheitsvektor \vec{e}_r in Richtung vom Ziel zum Projektil.

Unter Berücksichtigung der Erhaltungssätze — hier Energie und Drehimpuls⁽⁴⁾ — und Anwendung des Newtonschen^(f) Gesetzes findet man die Beziehung zwischen dem Stoßparameter b und dem Streuwinkel θ

$$b(\theta) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 m v^2} \cot \frac{\theta}{2}, \quad (\text{I.8})$$

wobei v der Betrag der asymptotischen Geschwindigkeit des Projektils ist.

Sei ϕ der (Polar-)Winkel zwischen der asymptotischen Flugrichtung des Projektils und \vec{e}_r . Die Position $\vec{r}(t)$ des Projektils zur Zeit t wird von r und ϕ charakterisiert und seine Geschwindigkeit lautet

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dr(t)}{dt} \vec{e}_r + r(t) \frac{d\phi(t)}{dt} \vec{e}_\phi,$$

wobei \vec{e}_ϕ senkrecht auf \vec{e}_r ist (vgl. Abb. I.4).

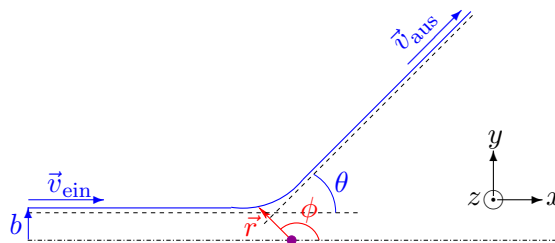


Abbildung I.4 – Koordinatensysteme für die Beschreibung der Streuung.

Im „Anfangszustand“ vor dem Streuprozess ($t = -\infty$) ist das Projektil bei $r = \infty$, $\phi = \pi$, mit Geschwindigkeit $\vec{v}_{\text{ein}} = |\vec{v}_{\text{ein}}| \vec{e}_x$. Im Endzustand ($t = +\infty$) gelten $r = \infty$, $\phi = \theta$, und $\vec{v}_{\text{aus}} = |\vec{v}_{\text{aus}}|(\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y)$.

⁽⁴⁾Wegen der Annahme, dass das Zielteilchen unendlich schwer ist, und damit fest bleibt, lässt sich die Impulserhaltung nicht gut ausdrücken.

^(f)I. NEWTON, 1642–1727

Die Erhaltung der gesamten Energie $\frac{1}{2}m\vec{v}_{\text{ein}}^2 = \frac{1}{2}m\vec{v}_{\text{aus}}^2$ — im Unendlichen verschwindet die Coulombsche potentielle Energie — gibt sofort $|\vec{v}_{\text{ein}}| = |\vec{v}_{\text{aus}}| \equiv v$.

Wiederum lautet der Bahndrehimpuls

$$\vec{L}(t) = m\vec{r}(t) \times \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = mr(t)^2 \frac{d\phi(t)}{dt} \vec{e}_z,$$

so dass seine Erhaltung zwischen dem Anfangszustand $[\vec{L}(-\infty) = -mb|\vec{v}_{\text{ein}}|\vec{e}_z = -mbv\vec{e}_z]$ und dem Zeitpunkt t führt zur Gleichung

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = -\frac{bv}{r(t)^2}. \quad (\text{I.9})$$

Dann lautet die Bewegungsgleichung $m d^2\vec{r}/dt^2 = \vec{F}_{\text{Coul.}}$. Nach Projektion auf die x -Achse kommt für die x -Komponente $v_x(t)$ der Geschwindigkeit $d\vec{r}(t)/dt$

$$\frac{dv_x(t)}{dt} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 mr(t)^2} \cos\phi(t).$$

Dividiert man diese Gleichung durch Gl. (I.9), so ergibt sich

$$\frac{dv_x}{d\phi} = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 mbv} \cos\phi,$$

d.h. die Bahnkurve wird nicht mehr durch die Zeit t , sondern durch den Polarwinkel ϕ parametrisiert. Die Integration von $\phi = \pi$, entsprechend $v_x = v$, bis $\phi = \theta$, d.h. $v_x = v \cos\theta$, gibt

$$v(\cos\theta - 1) = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 mbv} \sin\theta,$$

d.h.

$$b = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 mv^2} \frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta},$$

was unter Verwendung üblicher trigonometrischer Identitäten zur Gl. (I.8) führt.

Nach Ableiten von $b(\theta)$ [Gl. (I.8)] liefert Gl. (I.6) den differentiellen Wirkungsquerschnitt für das Problem und zwar

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega}(\theta, \varphi) = \frac{1}{16} \left(\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 \frac{1}{2}mv^2} \right)^2 \frac{1}{(\sin\frac{\theta}{2})^4}. \quad (\text{I.10a})$$

Führt man die kinetische Energie des Projektils $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$ ein, so ergibt sich die sogenannte *Rutherfordsche Streuformel*

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega}(\theta, \varphi) = \frac{1}{16} \left(\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 E_{\text{kin}}} \right)^2 \frac{1}{(\sin\frac{\theta}{2})^4}. \quad (\text{I.10b})$$

Tatsächlich hat E. Rutherford diese Form des differentiellen Wirkungsquerschnitts benutzt, um die Ergebnisse von durch H. Geiger^(g) und E. Marsden^(h) durchgeführten Experimenten [12] zu interpretieren.⁽⁵⁾ Die charakteristische $(\sin\frac{\theta}{2})^{-4}$ -Abhängigkeit in Gl. (I.10b) stimmt nämlich mit der Verteilung des Streuwinkels gemessen in der Streuung von α -Teilchen — d.h. ${}^4\text{He}$ -Kerne — an dünnen Gold- bzw. Silber-Folien überein, vgl. Abb. I.5.

Dabei hat Rutherford argumentiert, dass jedes α -Teilchen dank der Dünne der Targets in den meisten Fällen nur an einem einzelnen Atomkern stößt. Somit wird „Vielfachstreuung“^(xviii) vermieden, was die Modellierung vereinfacht. Der Stoß zwischen einem α -Projektil und einem Gold- bzw. Silber-Atomkern wurde dann als elektromagnetische Streuung einer Punktladung $q = ze$ mit $z = 2$ an einer Punktladung $Q = Ze$ mit $Z = 79$ bzw. $Z = 47$ modelliert, wobei $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ die Elementarladung ist. Dementsprechend sollte der Wirkungsquerschnitt (I.10b) für Stöße an Gold größer als für Stöße an Silber sein, was auch experimentell gefunden wurde.

⁽⁵⁾Die Experimente sind in Ref. [7] Experiment 6 beschrieben.

^(xviii)multiple scattering

^(g)H. GEIGER, 1882–1945 ^(h)E. MARSDEN, 1889–1970

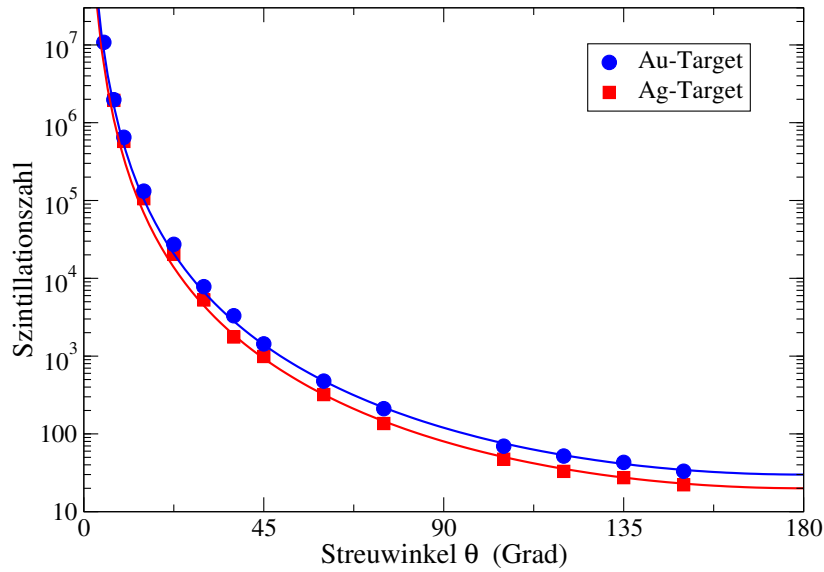


Abbildung I.5 – Winkelverteilung elastisch gestreuter α -Teilchen an Gold bzw. Silber — Daten aus dem historischen Artikel von Geiger und Marsden [12] —, verglichen mit den entsprechenden Rutherford'schen Wirkungsquerschnitten, Gl. (I.10b).

Einfache Überlegungen liefern den kleinsten Abstand — bei gegebener kinetischer Energie des Projektils — zwischen Projektil und Streuzentrum in einem Stoß. Offensichtlich wird dieses Minimum für Stöße mit verschwindendem Stoßparameter $b = 0$ erreicht, d.h. wenn das Projektil direkt auf das Ziel fliegt. Die zugehörige Bahnkurve wird in Abb. I.6 dargestellt: indem sich das Projektil dem Streuzentrum nähert, wird es durch die Coulomb-Abstoßung abgebremst, bis seine Geschwindigkeit v_x null wird und sich ihr Vorzeichen ändert, was genau im Punkt des kleinsten Abstands $r_{\min}(b = 0)$ passiert. Danach fliegt das Projektil zurück, entsprechend einem Streuwinkel $\theta = \pi$.

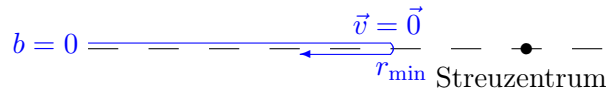


Abbildung I.6 – Flugbahn eines Projektilteilchens mit Stoßparameter $b = 0$.

Drückt man die Energieerhaltung $E_{\text{tot}} = E_{\text{Coul}}(r) + E_{\text{kin}}(r)$ für das Projektilteilchen aus, so ist die Gesamtenergie lange vor oder nach dem Stoß $E_{\text{tot}} = E_{\text{kin}}(r = \infty)$ und im Punkt $\vec{r}_{\min}(b = 0)$ des minimalen Abstands $E_{\text{tot}} = E_{\text{Coul}}(r_{\min}(b = 0))$. Unter Berücksichtigung der Form der potentiellen Energie im Coulomb-Feld $E_{\text{Coul}}(r) = qQ/(4\pi\epsilon_0 r)$ kommt

$$\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r_{\min}(b = 0)} = E_{\text{kin}}(r = \infty). \quad (\text{I.11})$$

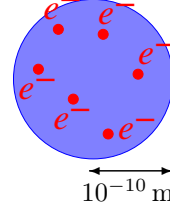
Im Geiger–Marsden-Experiment galten $q = 2e$, $Q = 79e$ (für Streuung an Au-Atomen) und für die kinetische Energie der α -Teilchen $E_{\text{kin}}(\infty) = 7,7 \text{ MeV}$. Diese Werte führen zu einem minimalen Abstand $r_{\min}(b = 0) \simeq 3 \cdot 10^{-14} \text{ m} = 30 \text{ fm}$.⁽⁶⁾

Aus der Übereinstimmung zwischen den experimentellen Ergebnissen und seiner Modellierung konnte Rutherford schließen, dass positive Ladungsträger in Gold-Atomen sich in einem kleinen Bereich mit Radius kleiner als etwa 30 fm befinden. Dazu konzentriert sich fast die ganze Atommasse in diesem Bereich, dessen elektrische Ladung Ze genau gleich das Negative deren der Z Elektronen des Atoms ist. Anhand dieser Ergebnisse hat Rutherford sein planetarisches Atommodell vorgeschlagen [13], in welchem Atome aus einem kleinen positiv geladenen Kern und einer Elektronenhülle mit typischem Radius von etwa 10^{-10} m bestehen.

⁽⁶⁾Die für die Kernphysik günstigen Einheiten und ihr Zusammenhang zu denen des SI-Systems werden in § I.5.1 zusammengefasst.

Die charakteristische Größe von Atomen ließ sich schon früher abschätzen. Laut dem Gesetz von Avogadro⁽ⁱ⁾ (1811) enthalten Gase bei gegebenen Drucken und Temperaturen in gleichen Volumina die gleiche Teilchenzahl. In 1865 konnte Loschmidt^(j) die Anzahl der in einer Volumeneinheit enthaltenen Molekülen — oder äquivalent die Loschmidt- / Avogadro-Zahl — ermitteln und somit für Atome eine Größenordnung von ca. 10^{-10} m berechnen.

Nach seiner Entdeckung des Elektrons (1897) schlug J. J. Thomson^(k) in 1904 sein „plum-pudding model“ des Atoms vor, in dem sich die Elektronen — ähnlich den Rosinen in einem Teig — in einem kontinuierlichen Medium positiver Ladung homogen verteilen, das so groß wie das ganze Atom ist. Die Masse eines solchen Atoms sammelt sich nicht in einem geringen Bereich, so dass das Modell durch die Geiger–Marsden-Experimente widerlegt war.



Bemerkungen:

* Die Rutherford-Streufel (I.10b) lässt sich günstig mithilfe der elektromagnetischen Feinstrukturkonstante $\alpha \equiv e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) \simeq 1/137$ umschreiben, indem die Ladungen q und Q durch ze und Ze ersetzt werden. Im System „natürlicher Einheiten“ der theoretischen Physik, in dem $\hbar = c = 1$, gilt somit

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega}(\theta, \varphi) = \frac{1}{16} \left(\frac{zZ\alpha}{E_{\text{kin}}} \right)^2 \frac{1}{(\sin \frac{\theta}{2})^4}.$$

* Die Rutherfordsche Streufel führt zu einem unendlichen totalen Wirkungsquerschnitt: für kleine Streuwinkel θ ist $\sin \frac{\theta}{2} \sim \frac{\theta}{2}$, während $d^2\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$, so dass das Integral in Gl. (I.5) wie θ^{-2} divergiert. Der Grund dafür ist die „unendliche Reichweite“ des durch den isolierten Atomkern erzeugten Coulomb-Potentials.⁽⁷⁾

In einem Atom schirmen die negativ geladenen Elektronen die positive Ladung des Kerns für Abstände größer als die typische Größe des Atoms ab. Diese Abschirmung des Potentials führt zu einer Änderung des differentiellen Wirkungsquerschnitts für kleine Streuwinkel, woraus $d^2\sigma/d^2\Omega$ nicht mehr divergiert. Die entsprechende Änderung ist für übliche Energien in der Kernphysik vernachlässigbar.

Wiederum war die kinetische Energie der α -Teilchen in den Geiger–Marsden-Experimenten hoch genug, damit sie tief in die Atome eindringen und die „nackten“ Atomkerne sehen konnten. Der kleinste Abstand $r_{\min}(b)$ der Bahn des α -Teilchens vom Kern beträgt nämlich

$$r_{\min}(b) = \frac{1}{2} \left[r_{\min}(b=0) + \sqrt{r_{\min}(b=0)^2 + 4b^2} \right], \quad (\text{I.12})$$

wobei $r_{\min}(b=0)$ durch Gl. (I.11) gegeben ist, kann wie folgt berechnet werden. Dabei kann der Stoßparameter durch den Streuwinkel ausgedrückt werden, vgl. Gl. (I.8), die sich leicht umschreiben lässt als $b(\theta) = \frac{1}{2} r_{\min}(b=0) \cot \frac{\theta}{2}$, woraus

$$r_{\min}(\theta) = \frac{1}{2} r_{\min}(b=0) \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} \right) \quad (\text{I.13})$$

folgt. Auch für den kleinsten durch Geiger und Marsden gemessenen Streuwinkel ($\theta = 5^\circ$) kommen α -Teilchen weniger als 500 fm nah am Kern, d.h. tief ins Innere des Atoms.

Beweis der Beziehung (I.12):

folgt aus der Erhaltung des Bahndrehimpulses: $L(\infty) = L(r_{\min})$.

* Die oben dargestellte Berechnung von Rutherford erfolgte im Rahmen der klassischen Mechanik. Im Nachhinein stellt sich die Frage, ob eine quantenmechanische Beschreibung des Streuprozesses nicht sinnvoller wäre. In diesem besonderen Fall ergibt jedoch eine solche Berechnung dank einigen Umständen dasselbe Ergebnis (in der „Bornschen^(l) Näherung“, d.h. in Störungsrechnung zur erster

⁽⁷⁾ ... was technisch bedeutet, dass $rV(r)$ für $r \rightarrow \infty$ nicht gegen Null geht.

⁽ⁱ⁾ A. AVOGADRO, 1776–1856 ^(j) J. J. LOSCHMIDT, 1821–1895 ^(k) J. J. THOMSON, 1856–1940 ^(l) M. BORN 1882–1970

Ordnung) wie die klassische Beschreibung:

- Erstens war im historischen Rutherford'schen Streuexperiment die mit dem α -Teilchen assoziierte de Broglie^(m)-Wellenlänge $\lambda = \hbar c / \sqrt{2mE_{\text{kin}}}$ viel kleiner als der kleinste Abstand zwischen Projektil und Ziel: für $E_{\text{kin}} = 7,7 \text{ MeV}$ ist $\lambda \simeq 1 \text{ fm} \ll r_{\text{min}}$, so dass die „wellenartige“ Natur der α -Teilchen hier keine Rolle spielt.
- Dazu hat das α -Teilchen den Spin 0: für die Streuung spinbehafteter Teilchen nimmt der Wirkungsquerschnitt eine (leicht) unterschiedliche Form an — obwohl der Unterschied nur für relativistische Projektile eine Rolle spielt.

Die Verallgemeinerung der Rutherford-Streuformel auf die elastische Streuung von relativistischen Elektronen (Masse m_e , Ladung $q = -e$, Spin $\frac{1}{2}$) an einem Spin-0-Atomkern mit Z Protonen ist unter Vernachlässigung des Rückstoßes des Kerns durch die Mott⁽ⁿ⁾-Streuformel gegeben:

$$\left. \frac{d^2\sigma}{d^2\Omega}(\theta, \varphi) \right|_{\text{Mott}} = \frac{1}{4} \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0\gamma^2 m_e^2 v^2} \right)^2 \frac{1}{(\sin \frac{\theta}{2})^4} \left(m_e^2 + \frac{\gamma^2 m_e^2 v^2}{c^2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \right), \quad (\text{I.14a})$$

wobei $\gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$ der Lorentz^(o)-Faktor des Elektrons im Ruhesystem des Kerns ist.⁽⁸⁾ Nach einigen Umformungen lautet dies noch

$$\left. \frac{d^2\sigma}{d^2\Omega}(\theta, \varphi) \right|_{\text{Mott}} = \left. \frac{d^2\sigma}{d^2\Omega}(\theta, \varphi) \right|_{\text{Rutherford}} \frac{1}{\gamma^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right). \quad (\text{I.14b})$$

Für ultrarelativistische Elektronen ($v \simeq c$) wird dieser differentielle Wirkungsquerschnitt im Limes $\theta \rightarrow \pi$ „klein“, d.h. die Rückwärtsstreuung solcher Elektronen am Kern wird stark unterdrückt. Im nicht-relativistischen Fall $v/c \ll 1$ ergibt sich die Rutherford-Streuformel wieder.

Aus den Geiger–Marsden-Experimenten lässt sich nicht auf eine endliche Größe des Atomkerns schließen, da die Ergebnisse mit denen für Streuung an einem punktförmigen Ziel übereinstimmen. Somit ist nur bekannt, dass der Kernradius kleiner als der kleinste Abstand r_{min} zwischen α -Teilchen und Kernen ist.

1.2.3 Streuung an ausgedehnten Verteilungen

Die Beziehung (I.11) weist darauf hin, wie Information über die Ausdehnung des Atomkerns kann gewonnen werden. Somit kann man entweder Kerne mit kleinerer Ladungszahl $Z = Q/e$ verwenden, um die Coulomb-Abstoßung zu verringern, oder Projektile mit höherer kinetischer Energie benutzen. In beiden Fällen kann das Projektil näher am Kern kommen und den Einfluss eines nicht-verschwindenden Radius spüren, woraus eine Abweichung von der Rutherford'schen Streuformel folgt.

Sei zunächst angenommen, dass die an Atomen gestreuten Projektile mit dem Atomkern nur elektromagnetisch wechselwirken. Im Nachhinein ist bekannt, dass dies nicht der Fall für α -Teilchen ist, die auch mit dem Kern durch die starke Kernkraft wechselwirken. Im Gegensatz dazu unterliegen Elektronen nicht der starken Wechselwirkung, so dass ihre Streuung meistens durch die elektromagnetische Kraft verursacht wird.⁽⁹⁾ Qualitativ gesehen wird das in den Kern eindringende Projektil eine geringere elektrische Ladung spüren, als wenn der Kern punktförmig wäre, so dass es weniger abgestoßen bzw. gestreut ist. Somit kann man bei festem Streuwinkel θ erwarten — vorausgesetzt dieser Winkel groß genug ist, damit der mit Gl. (I.13) berechnete entsprechende Wert des kleinsten Abstands des Projektils vom Streuzentrum $r_{\text{min}}(\theta)$ kleiner als der Kernradius ist —, dass der zugehörige differentielle Wirkungsquerschnitt $d^2\sigma/d^2\Omega(\theta)$ vom Wert für Streuung an einem punktförmigen Ziel abweicht. Genauer sollte $d^2\sigma/d^2\Omega(\theta)$ kleiner sein als für Stöße an Punktladungen: das Verhältnis des Wirkungsquerschnitts für Streuung an einer ausgedehnten Ladungsverteilung

⁽⁸⁾Zur Erinnerung ist $\gamma m_e \vec{v}$ der Impuls des Elektrons.

⁽⁹⁾Eigentlich unterliegen Elektronen auch der schwachen Wechselwirkung, die hier aber vernachlässigbar gegenüber der elektromagnetischen Wechselwirkung ist.

^(m)L. DE BROGLIE, 1892–1987 ⁽ⁿ⁾N. MOTT, 1905–1996 ^(o)H. A. LORENTZ, 1853–1926

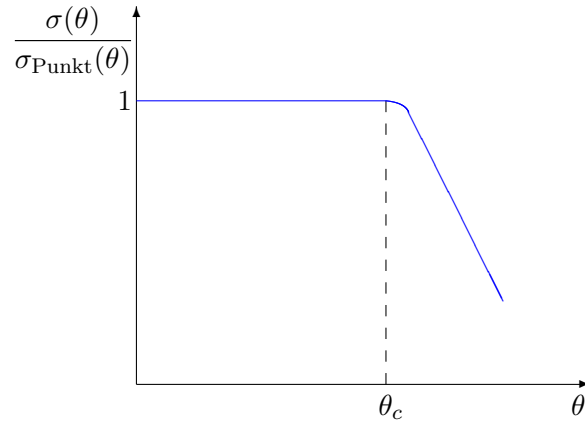


Abbildung I.7 – Verhältnis des differentiellen Wirkungsquerschnitts [hier der Kurze halber als $\sigma(\theta)$ bezeichnet] für Streuung an einer ausgedehnten Ladungsverteilung zu jenem für Streuung an einer Punktladung.

zum Wirkungsquerschnitt für Streuung an einer Punktladung sollte ab einem gewissen Wert von θ kleiner als 1 werden, wie in Abb. I.7 schematisch dargestellt wird.

Eigentlich wurde ein solches Verhalten experimentell beobachtet, z.B. in Streuexperimenten mit α -Teilchen mit $E_{\text{kin}} = 22$ MeV an verschiedenen Kernen wie Gold (^{197}Au) oder Blei (^{208}Pb) [14]. Dabei wird das Verhältnis kleiner als 1 für $\theta_c \simeq 90^\circ$, entsprechend dank Gl. (I.11) und (I.13) einem kleinen Abstand der α -Teilchen vom Kernzentrum von etwa 10 fm.

Bemerkung: Anstatt einer Abweichung vom punktförmigen Fall ab einem gewissen Streuwinkel bei fester kinetischer Energie zu betrachten, kann man auch den Streuwinkel θ_0 festlegen und die kinetische Energie der Projektile variieren lassen. Dann soll die Abweichung ab einem Wert E_c von E_{kin} auftreten. Genauer soll der differentielle Wirkungsquerschnitt $d^2\sigma/d^2\Omega(\theta_0)$ für $E_{\text{kin}} \leq E_c$ wie E_{kin}^{-2} skalieren, wie in Gl. (I.10b) zu sehen ist, während das Skalenverhalten für höhere kinetische Energien nicht mehr gilt (s. Abb. I.8). Aus dem Wert E_c der kinetischen Energie, ab dem das E_{kin}^{-2} -Skalieren verletzt wird, kann die Größe des Kernradius abgeschätzt werden.

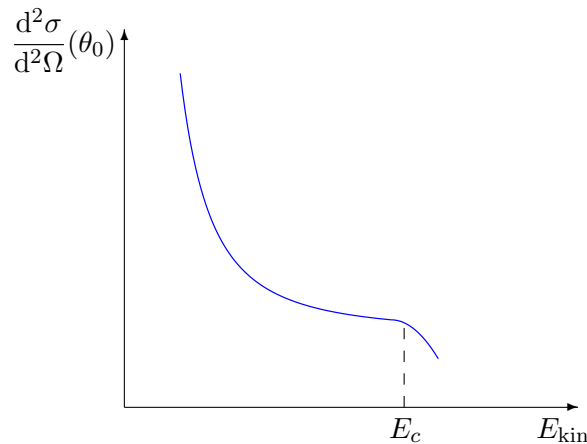


Abbildung I.8 – Verletzung des E_{kin}^{-2} -Skalierens des Rutherford'schen differentiellen Wirkungsquerschnitts (I.10b) bei festem Streuwinkel θ_0 .

Elektrischer Formfaktor

Für eine mehr quantitative Beschreibung der Ausdehnung des Ziels sowie der zugehörigen Ladungsverteilung ist es zunächst günstig, den differentiellen Wirkungsquerschnitt durch den *Impulsübertrag*^(xix) zu beschreiben. Dabei ist der Letztere durch $\vec{q} \equiv \vec{p}_{\text{ein}} - \vec{p}_{\text{aus}}$ definiert, mit \vec{p}_{ein} bzw.

^(xix) momentum transfer

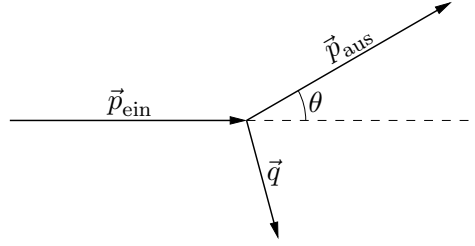


Abbildung I.9 – Zur Definition des Impulsübertrags.

\vec{p}_{aus} dem Impuls des einfallenden bzw. gestreuten Projektils, s. Abb. I.9. Bei elastischer Streuung gilt $|\vec{p}_{\text{aus}}| = |\vec{p}_{\text{ein}}|$, so das Dreieck mit Seiten \vec{p}_{ein} , \vec{p}_{aus} und \vec{q} gleichseitig ist. Daraus folgt $|\vec{q}| = 2|\vec{p}_{\text{ein}}| \sin \frac{\theta}{2}$.

Mithilfe der nicht-relativistischen Beziehung $E_{\text{kin}} = |\vec{p}_{\text{ein}}|^2/2m$ und der obigen Beziehung zwischen \vec{p}_{ein} und \vec{q} lässt sich die Rutherfordsche Streuformel (I.10b) leicht durch \vec{q} ausdrücken als

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega}(\vec{q}) = \left(\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{4m^2}{|\vec{q}|^4}. \quad (\text{I.15})$$

Allgemeiner kann man jeden differentiellen Wirkungsquerschnitt für die durch die Coulomb-Kraft vermittelte elastische Streuung an einem punktförmigen Streuzentrum durch den Impulsübertrag ausdrücken, egal, ob man relativistische oder quantenmechanische Effekte berücksichtigt. Sei $d^2\sigma/d\Omega(\vec{q})|_{\text{Punkt}}$ dieser Wirkungsquerschnitt. Für die Streuung an ausgedehnten Zielen gilt

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega}(\vec{q}) = F^2(\vec{q}) \frac{d^2\sigma}{d^2\Omega}(\vec{q}) \Big|_{\text{Punkt}} \quad (\text{I.16})$$

wobei $F^2(\vec{q})$ der *elektrische Formfaktor*^(xx) des Ziels ist, der mit der im nächsten Paragraph diskutierten elektrischen Ladungsdichteverteilung $\rho_{\text{el.}}(\vec{r})$ verknüpft ist:

$$F^2(\vec{q}) \equiv \left| \frac{1}{Q} \int \rho_{\text{el.}}(\vec{r}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar} d^3\vec{r} \right|^2. \quad (\text{I.17})$$

Bemerkung: Der Ausdruck (I.16) des Wirkungsquerschnitts gilt noch im relativistischen Fall, vorausgesetzt das Projektil oder der Atomkern (oder beide) den Spin 0 hat. Falls beide einen nichtverschwindenden Spin und dementsprechend ein magnetisches Dipolmoment haben, werden diese Dipolmomente miteinander wechselwirken. Um dies zu berücksichtigen, wird neben dem elektrischen noch ein magnetischer Formfaktor eingeführt.

^(xx)electric form factor