ANOMALIES CHIRALES ET DIMENSIONS SUPPLEMENTAIRES

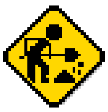
N. Borghini, Y. Gouverneur, M. Tytgat

Université Libre de Bruxelles

- Théories de grande unification
  $SU(5)$, $SO(10)$, E_6...

- Divers types d'anomalies
  $D = 4$ → une génération est une génération
  $D > 4$

- Anomalies + GUTs + dimensions supplémentaires
  $SU(5)$ en $D = 6$ → 3 générations

- Phénoménologie 

Anomalies and fermion content of grand unified theories in extra dimensions
Phys. Rev. D**65** (2002) 025017

THÉORIES DE GRANDE UNIFICATION

$SU(3)_c \otimes U(1)_{\text{é.m.}} \subset SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y \ldots$ pourquoi ne pas continuer ?

$$SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1) \subset SU(5) \subset SO(10) \subset E_6$$

Brisures de symétrie successives :

$$E_6 \to SO(10) \to SU(5) \to SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$$

au niveau des fermions :

$$\mathbf{27} \to \mathbf{1} \oplus \mathbf{10} \oplus \mathbf{16} \to \mathbf{1} \oplus (\mathbf{5} \oplus \bar{\mathbf{5}}) \oplus (\mathbf{1} \oplus \bar{\mathbf{5}} \oplus \mathbf{10}) \to \ldots \oplus (\mathcal{D} \oplus \mathcal{L}) \oplus (\mathcal{Q} \oplus \mathcal{U} \oplus \mathcal{E})$$

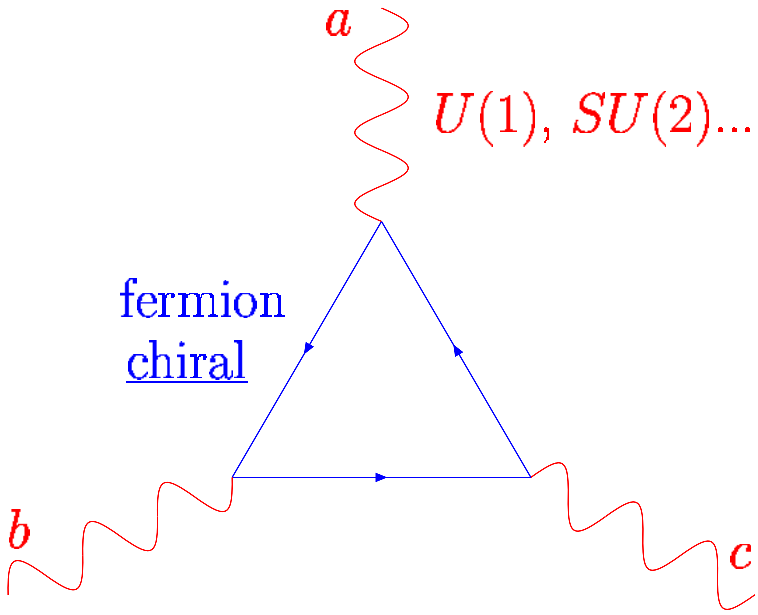
Notations utiles :

$$\mathcal{Q} \equiv (\mathbf{3}, \mathbf{2}, \tfrac{1}{3}) = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{U} \equiv (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, \tfrac{-4}{3}) = (\bar{u}), \qquad \mathcal{D} \equiv (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, \tfrac{2}{3}) = (\bar{d}),$$

$$\mathcal{L} \equiv (\mathbf{1}, \mathbf{2}, -1) = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{E} \equiv (\mathbf{1}, \mathbf{1}, 2) = (e^+)$$

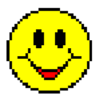
ANOMALIES EN $D = 4$

Anomalie : $\underbrace{\text{symétrie classique}}_{\partial_\mu j^\mu = 0}$ mais pas quantique

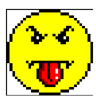


$\Rightarrow \quad \partial_\mu j_a^\mu \neq 0$

$$\partial_\mu j_a^\mu \propto \overbrace{D_{abc}}^{\sum_L \mathrm{STr}\,(T^a T^b T^c) - \sum_R \mathrm{STr}\,(T^a T^b T^c)} \epsilon^{\nu\rho\sigma\tau} F^b_{\nu\rho} F^c_{\sigma\tau}$$

Brisure d'une symétrie *globale* 

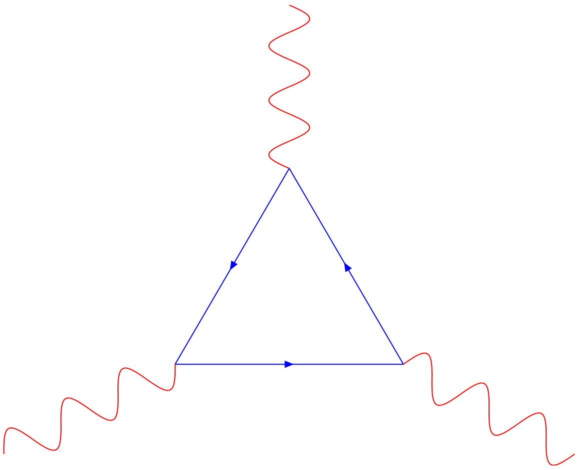
$\rightarrow$ désintégration du $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$

Brisure d'une symétrie *locale* 

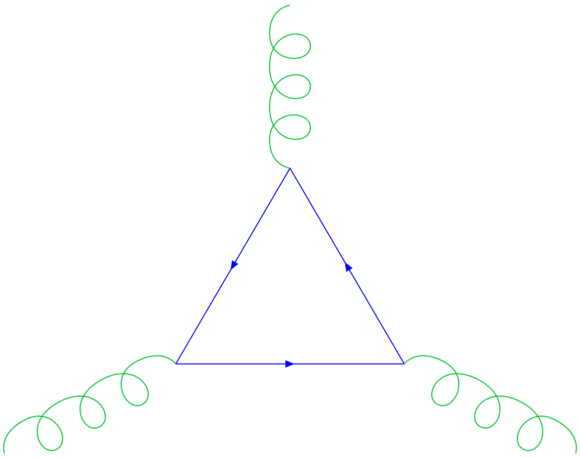
$\rightarrow$ conflit entre invariance de jauge et renormalisabilité

$\rightarrow$ contraintes sur le contenu en fermions

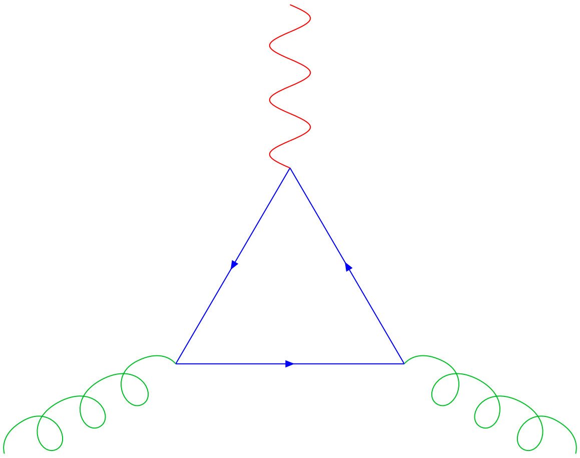
TYPES D'ANOMALIES
(PERTURBATIVES)



Anomalie de jauge



Anomalie gravitationnelle



Anomalie mixte

ANOMALIE DE JAUGE

$\rightarrow$ non-conservation du courant de jauge,

$$\propto \mathrm{STr}\,(T^aT^bT^c) \propto \mathrm{Tr}\,(T^a\{T^b,T^c\})$$

Anomalies dans le Modèle Standard (en $D = 4$) ?

$\mathcal{Q}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{E}$ lévogyres

- anomalie $U(1)^3$? $\quad \propto \quad \sum_L \mathrm{STr}\,(T^aT^bT^c) = \sum_L Y^3$

$$6\times\left(\frac{1}{3}\right)^3+3\times\left(\frac{-4}{3}\right)^3+3\times\left(\frac{2}{3}\right)^3+2\times(-1)^3+2^3=0$$

- anomalie $SU(2)^3$? $\quad \mathrm{Tr}\,(\sigma^a\{\sigma^b,\sigma^c\}) = 2\delta^{bc}\,\mathrm{Tr}\,\sigma^a = 0$

- anomalie $SU(3)^3$?

$(\bar{\mathbf{3}})_L$ se transforme comme $\mathbf{3}_R$, autant de $\mathbf{3}_R$ que de $\mathbf{3}_L$

$$\rightarrow \sum_L - \sum_R = 0$$

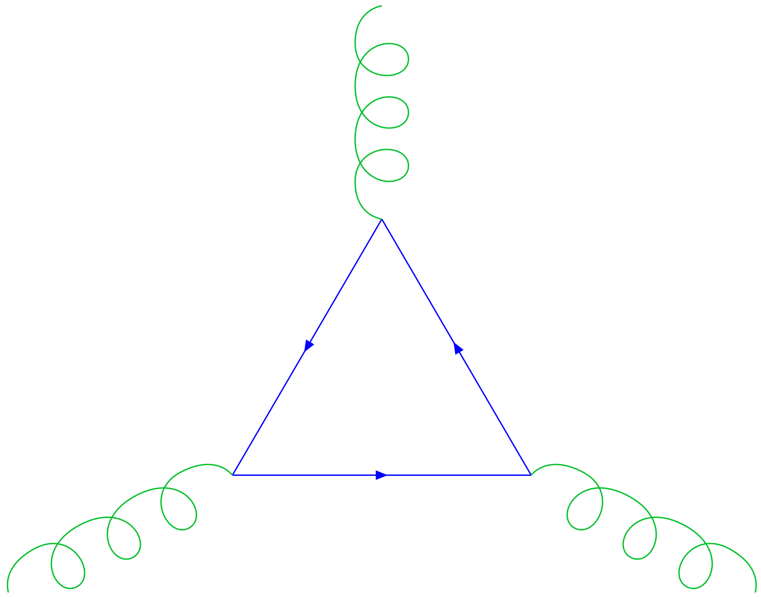
- anomalie $SU(3)^2\,U(1)$?

$$\sum_{\mathbf{3},\bar{\mathbf{3}}} Y = 2\times\frac{1}{3}+\frac{-4}{3}+\frac{2}{3}=0$$

- anomalie $SU(2)^2\,U(1)$?

$$\sum_{\text{doublets}} Y = 3\times\frac{1}{3}+(-1)=0$$

ANOMALIE GRAVITATIONNELLE



Spineurs chiraux couplés à la gravitation
$\rightarrow$ non-conservation du tenseur énergie-impulsion

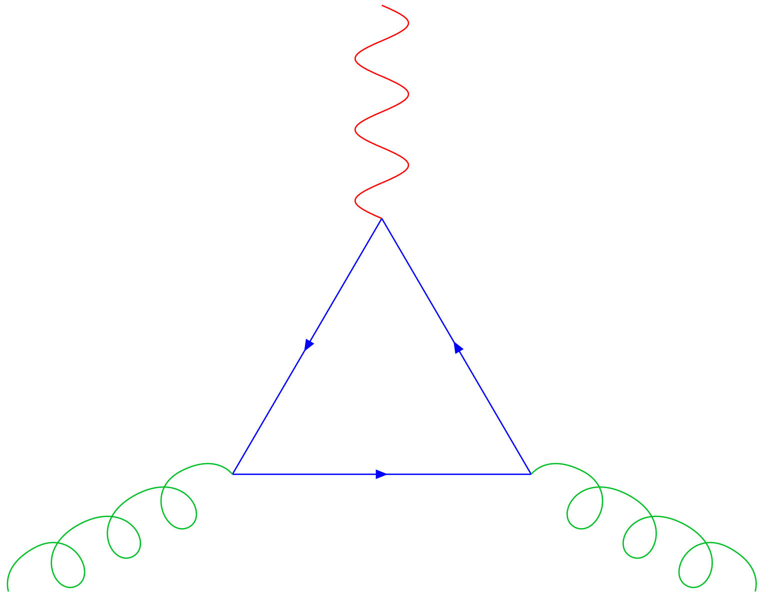
anomalie s'annule si $N_L - N_R = 0$

En $D = 4$, Ψ_L comprend $\begin{cases} \text{une particule left} \\ \text{son antiparticule, } \underline{\text{right}} \end{cases}$

Gravitation ne voit pas la charge, ne voit qu'un degré de liberté left et un degré de liberté right, $N_L - N_R = 0$

$\rightarrow$ anomalie gravitationnelle toujours nulle en $D = 4$

ANOMALIE MIXTE



Non-conservation du tenseur énergie-impulsion et/ou du courant de jauge

Plusieurs diagrammes, avec r gravitons et $3-r$ bosons

- s'annule si r impair
- $\propto$ STr $\underbrace{(T^a ... T^i)}_{3-r}$

Dans le cas du Modèle Standard : $r = 2$

$\rightarrow$ anomalie graviton-graviton-G

uniquement $U(1)$: $\sum_L Y = 0$

ANOMALIE DE JAUGE GLOBALE

"Anomalie de Witten", "non-perturbative"

Dans le cas où il existe des transformations de jauge qui ne peuvent se ramener à l'identité

coupables potentiels : groupe d'homotopie $\Pi_{D=4}(G) \neq 0$

$$\int \mathrm{d}\Psi \mathrm{d}\bar{\Psi}\, e^{\bar{\Psi} i \not{D} \Psi} = \begin{cases} \det(i\not{D}) & \text{si } \Psi \text{ Dirac} \\ (\det(i\not{D}))^{1/2} & \text{si } \Psi \text{ Weyl} \end{cases}$$

Sous les transformations non triviales, $\det(i\not{D})$ est impair

$$\to Z = \int \mathrm{d}A_\mu\, (\det(i\not{D}))^{1/2} \exp\left(-\int \mathrm{Tr}\, F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right) = 0$$

pas moyen de définir la valeur moyenne d'une observable...

Dans le Modèle Standard, $\Pi_4(SU(2)) = Z_2$

$\to$ il faut $N(\mathbf{2}_L) - N(\mathbf{2}_R) = 0 \bmod 2.$

... 4 doublets, c'est OK.

BRISURE DE SYMÉTRIE

On ne peut pas créer d'anomalie ! (ni en détruire)

$$SO(10) \to SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$$
$$\mathbf{16} \to (\mathcal{Q}, \mathcal{U}, \mathcal{D}, \mathcal{L}, \mathcal{E}) \oplus \mathbf{1}$$

$SO(10)$ sans anomalie en $D = 4$:

générateur T^a : matrice $(T_{\alpha\beta})_{jk} = -i(\delta_{\alpha j}\delta_{\beta k} - \delta_{\alpha k}\delta_{\beta j})$, antisymétrique

anomalie $\propto$ Tr $(T_{\alpha\beta}\{T_{\gamma\delta}, T_{\epsilon\zeta}\})$, invariant sous $SO(10)$

impossible ! $\to$ **16** sans anomalie locale

(idem pour **10**)

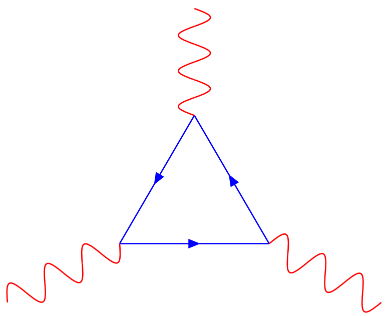
$\Pi_4(SO(10)) = 0$: pas d'anomalie globale non plus

"Donc" pas d'anomalie dans une génération du Modèle Standard [ni dans $\bar{\mathbf{5}} \oplus \mathbf{10} \subset \mathbf{16}$ dans le cas de $SU(5)$, ni pour le $\mathbf{27} \supset (\mathbf{16} \oplus \mathbf{10})$ de E_6]

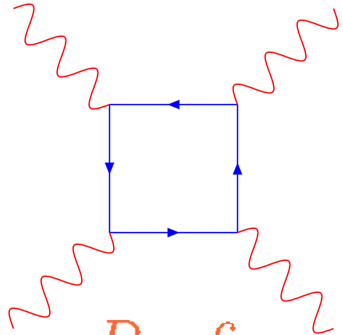
Pas de contrainte sur le nombre de générations...

S'il y a une anomalie, elle peut changer de nature (locale $\to$ globale)

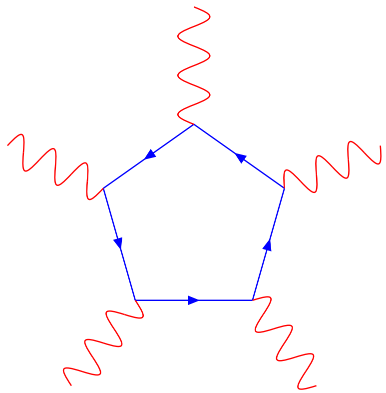
ANOMALIES EN DIMENSION QUELCONQUE



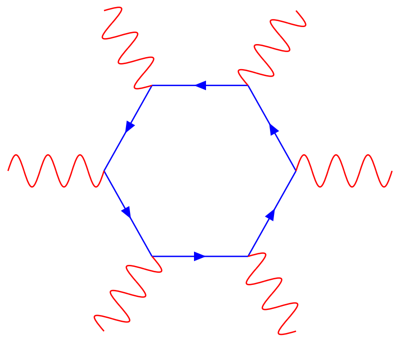
$D = 4$



$D = 6$



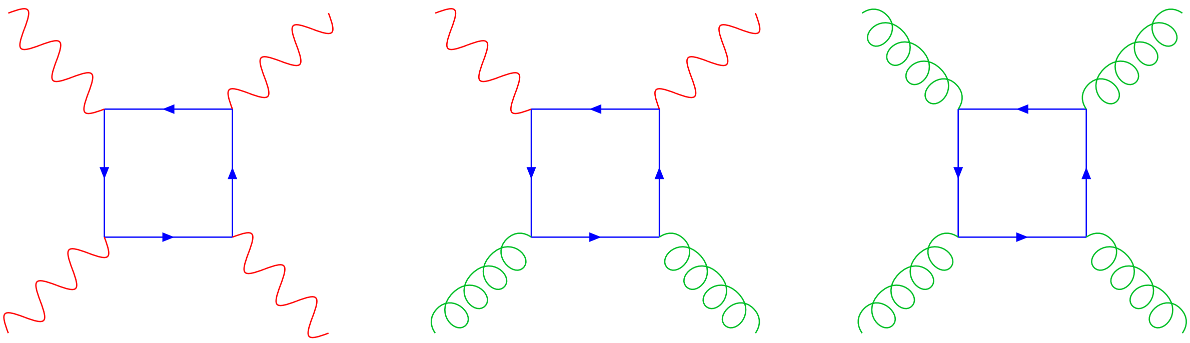
$D = 8$



$D = 10$

$$\text{Anomalie} \propto \sum_{L} \mathrm{STr}\,(T^1 \ldots T^{D/2+1}) - \sum_{R} \mathrm{STr}\,(T^1 \ldots T^{D/2+1})$$

ANOMALIES EN $D = 6$



pure jauge — mixte — gravitationnelle

- pure jauge $\propto \left(\sum_L - \sum_R\right) \mathrm{STr}\left(T^a T^b T^c T^d\right)$
- mixte $\propto \left(\sum_L - \sum_R\right) \mathrm{STr}\left(T^a T^b\right)$
- gravitationnelle : $N_L - N_R$ pas nécessairement nul, car en $D = 6$ la conjugaison de charge n'échange pas la chiralité.

$\rightarrow$ on ajoute des singlets s'il le faut...

- anomalie globale : $\Pi_6(G) = 0$?

si non $(= Z_m)$, $c_k[N(\mathbf{k}_L) - N(\mathbf{k}_R)] = 0 \bmod m$

UNE PROPRIÉTÉ UTILE

Comment calculer $\mathrm{STr}\,(T^1 \ldots T^{D/2+1})$?

♡ Certaines traces symétrisées sont factorisables...

par exemple, pour $SU(2)$:

$$\mathrm{STr}\,(T^a T^b T^c) \propto \mathrm{STr}\,(T^a T^b)\ \mathrm{Tr}\,T^c \quad (=0)$$
$$\mathrm{STr}\,(T^a T^b T^c T^d) \propto \mathrm{STr}\,(T^a T^b)\ \mathrm{STr}\,(T^c T^d)$$

Il existe des traces "fondamentales", liées aux Casimir

- pour $SU(N)$, traces sur 2, 3, ... N générateurs ;
- pour $SO(2N)$, traces sur 2, 4, ... $2N-2$ et N générateurs ;
- pour E_6, traces sur 2, 5, 6, 8, 9 ou 12 générateurs.

→ pas d'anomalie de jauge en $D=4$ pour $SO(10)$ et E_6, ni en $D=6$ pour E_6

UNE AUTRE PROPRIÉTÉ UTILE !

♡ La trace sur les générateurs d'une représentation quelconque T^a s'expriment en fonction de traces sur les générateurs de la représentation fondamentale t^a :

$$\mathrm{STr}\,(T^aT^bT^c) = A_3\,\mathrm{STr}\,(t^at^bt^c) + A_3^{21}\,\mathrm{STr}\,(t^at^b)\;\mathrm{Tr}\,t^c = A_3\,\mathrm{STr}\,(t^at^bt^c)$$

$$\mathrm{STr}\,(T^aT^bT^cT^d) = A_4\,\mathrm{STr}\,(t^at^bt^ct^d) + A_4^{22}\,\mathrm{STr}\,(t^at^b)\;\mathrm{STr}\,(t^ct^d)$$

Les coefficients $A^{\cdots}_{D/2+1}$ dépendent du groupe et de la représentation T^a considérés.

- $SU(3)$, représentation $\bar{\mathbf{3}}$, $A_3 = -1$: en $D = 4$, $\sum_{\bar{\mathbf{3}}_L} = -\sum_{\mathbf{3}_L}$;
- $SU(5)$, $A_3 = -1$ pour la représentation $\bar{\mathbf{5}}$, $A_3 = +1$ pour la $\mathbf{10}$: en $D = 4$, la somme de leurs anomalies s'annule ;
- $SU(5)$, $A_4 = -1$ et $A_4^{22} = 0$ pour $\bar{\mathbf{5}}$, $A_4 = -3$ et $A_4^{22} = 3$ pour $\mathbf{10}$.

Or on va pouvoir annuler les termes $\mathrm{STr}\,(t^at^b)\;\mathrm{STr}\,(t^ct^d)$...

MECANISME DE GREEN & SCHWARZ
ANOMALIES (IR)REDUCTIBLES

Il n'y a pas que les fermions qui puissent être responsables d'anomalies...

on peut introduire un tenseur antisymétrique $\mathbf{B}_{\mu_1\dots\mu_{D/2-1=2}}$ tel que $\mathbf{F} = \mathrm{d}\mathbf{B}$ soit self-dual, anomal, et dont l'anomalie soit $\propto \mathrm{STr}\,(T^a T^b)$.

(En $D = 2$, $\mathbf{B}$ scalaire, $\mathbf{F}$ self-dual s'écrit $(\partial_0 - \partial_1)\mathbf{B} = 0$: choix d'une direction=chiralité)

Avec un couplage approprié, l'anomalie de $\mathbf{B}$ vient exactement compenser les termes $\mathrm{STr}\,(T^a T^b)$ venant de l'anomalie de jauge et de l'anomalie mixte fermioniques !

$\rightarrow$ anomalies "réductibles"

$$\text{anomalie} \propto \underbrace{A_4\,\mathrm{STr}\,T^4}_{\downarrow} + \underbrace{A_4^{22}(\mathrm{STr}\,T^2)^2}_{\text{Green...}} + \underbrace{B_4[\mathrm{Tr}\,R^4 + \frac{5}{4}(\mathrm{Tr}\,R^2)^2]}_{\text{singlets}} + \underbrace{C_4^{22}\mathrm{STr}\,T^2\,\mathrm{Tr}\,R^2}_{\text{...Schwarz}}$$

anomalie irréductible : s'annule grâce au contenu fermionique

$SU(5)$ EN $D=6$

- Représentation $\bar{\mathbf{5}}$: $\quad \mathrm{STr}\,(T^4) = 1 \times \mathrm{STr}\,(t^4)$
- Représentation $\mathbf{10}$:

$$\mathrm{STr}\,(T^4) = -3 \times \mathrm{STr}\,(t^4) + 3 \times \underbrace{\mathrm{STr}\,(t^2)^2}_{\text{réductible}}$$

On veut qu'il n'y ait pas d'anomalie de jauge

♠ solution (lâche) $\bar{\mathbf{5}}_L$, $\mathbf{10}_L$, $\bar{\mathbf{5}}_R$, $\mathbf{10}_R$...

sans intérêt !

♡ solution "économique" $\bar{\mathbf{5}}_L$, $\bar{\mathbf{5}}_L$, $\bar{\mathbf{5}}_L$, $\mathbf{10}_L$

anomalies irréductibles se compensent...

mais tout le monde n'y est pas (expérience : 45 fermions)

♡ solution bizarre $\bar{\mathbf{5}}_L$, $\bar{\mathbf{5}}_L$, $\bar{\mathbf{5}}_L$, $\mathbf{10}_L$, $\underbrace{\mathbf{10}_L, \mathbf{10}_R}_{\text{"vectoriel"}}$

pourquoi pas ?

Anomalie mixte : mécanisme de Green-Schwarz

Anomalie gravitationnelle : on ajoute des singlets
(25 $\mathbf{1}_R$, ou, mieux, 3 $\mathbf{1}_L$, car $\mathbf{B} \approx 28\ \mathbf{1}_R$)

Anomalie globale : $\Pi_6(SU(5)) = 0$, c'est OK.

$SU(5)$ EN $D = 6$

Solution sans anomalie :

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{5}}_L \\ \mathbf{10}_L \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{5}}_L \\ \mathbf{10}_L \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{5}}_L \\ \mathbf{10}_R \end{pmatrix}$$

et 3 singlets sous $SU(5)$ (“neutrinos stériles” ?)

+ le tenseur de Green & Schwarz !

3 générations !!!

3 générations de 15 fermions + 3 singlets...

= 3 générations de 16 fermions ?

Dans $SO(10)$, le $\mathbf{16}$ est anomal en $D = 6$...

(facile ! $\mathbf{16} \to \bar{\mathbf{5}} \oplus \mathbf{10}$, anomal)

En plus, $\bar{\mathbf{5}}_L \oplus \mathbf{10}_R \subset \mathbf{16}_{??}$:

troisième génération ne peut pas venir de $SO(10)$

$$SU(5) \to SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$$

$$3 \times \bar{\mathbf{5}}_L + \mathbf{10}_L \to 3 \times (\mathcal{D}, \mathcal{L})_L + (\mathcal{Q}, \mathcal{U}, \mathcal{E})_L$$

Anomalies de $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ en $D = 6$:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ SU(3)^4, SU(2)^4, U(1)^4 \text{ factorisables} \\ \bullet\ SU(3)^2 SU(2)^2, SU(3)^2 U(1)^2, SU(2)^2 U(1)^2 \\ \bullet\ \text{anomalies mixtes} \end{array}\right\} \text{ mécanisme de Green-Schwarz}$$

- $SU(3)^3 U(1)$: on utilise $A_3(\bar{\mathbf{3}} \in SU(3)) = -1 = -A_3(3)$

$$\mathrm{STr}\,(T'^a T'^b T'^c T'^d) = -1 \times \left(3 \times \frac{2}{3} + \frac{-4}{3}\right) + 1 \times \left(2 \times \frac{1}{3}\right) = 0$$

- Anomalie gravitationnelle : rien n'a changé !

$$SU(5) \to SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$$

$$3 \times \bar{\mathbf{5}}_L + \mathbf{10}_L \to 3 \times (\mathcal{D}, \mathcal{L})_L + (\mathcal{Q}, \mathcal{U}, \mathcal{E})_L$$

- Anomalies globales :

$$\Pi_6(SU(3)) = Z_6, \qquad \Pi_6(SU(2)) = Z_{12}$$

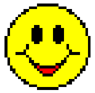
$\to$ il faut $N(\mathbf{3}_L) - N(\mathbf{3}_R) = 0$ mod 6 et $2[N(\mathbf{2}_L) - N(\mathbf{2}_R)] = 0$ mod 12

$(D = 6 \to \bar{\mathbf{3}}_L \approx \mathbf{3}_L)$

$3\ \mathcal{D} + 1\ \mathcal{Q} + 1\ \mathcal{U} = 6$ (anti)triplets, $\qquad 3\ \mathcal{L} + 1\ \mathcal{Q} = 6$ doublets

Ca marche !

On récupère une théorie $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ en $D = 6$ sans anomalie

 L'anomalie qui contraint le nombre de générations a changé de nature !

locale pour $SU(5)$, $\to$ globale pour $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$

PHÉNOMÉNOLOGIE

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{5}}_L \\ \mathbf{10}_L \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{5}}_L \\ \mathbf{10}_L \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{5}}_L \\ \mathbf{10}_R \end{pmatrix}$$

Termes de masse et couplages de Yukawa en $D = 6$?

- covariance $\rightarrow$ nécessairement $\mathbf{k}_R + \mathbf{k}'_L$

  différent de $D = 4$!!

- invariance sous $SU(5)$

  $\rightarrow$ soit $\mathbf{10}_L + \mathbf{10}_R$

  couplage entre $\mathbf{10}_R$ et une combinaison des $\mathbf{10}_L$

  "vectoriel" $\rightarrow$ masse élevée (m_t ?)

  $\rightarrow$ soit $\bar{\mathbf{5}}_L + \mathbf{10}_R$ (+ Higgs $\mathbf{5}$)

  $\rightarrow$ masse m_b ?

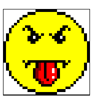
Il faut calculer les corrections quantiques...

réduction $D = 6 \rightarrow D = 4$

$\rightarrow$ "choix" des chiralités des fermions $4 - D$

$\rightarrow$ brisure de $SU(5)$

Phénoménologie de $SU(5)$ en $D = 6$

 désintégration du proton !

THE END

♡ Anomalies peuvent restreindre les GUTs possibles en $D > 4$

($SU(5)$ en $D = 8 \to 11$ générations)

$SU(5)$ en $D = 6 \to 3$ générations (chirales)

♡ Solution à 3 générations "non-standard"

$3^{\text{ème}}$ génération différente

hiérarchie de masse ?

couplages bizarres → violation de CP ?

compactification du tenseur $\mathbf{B}$ → CP fort ?

♠ Unification s'arrête à $SU(5)$,

♠ désintégration du proton,

♠ compactification arbitraire...