CORRELATIONS MULTIPLES
DUES A LA
CONSERVATION DE L'IMPULSION

N variables liées par la condition $\mathbf{p}_1 + \cdots + \mathbf{p}_N = \mathbf{0}$

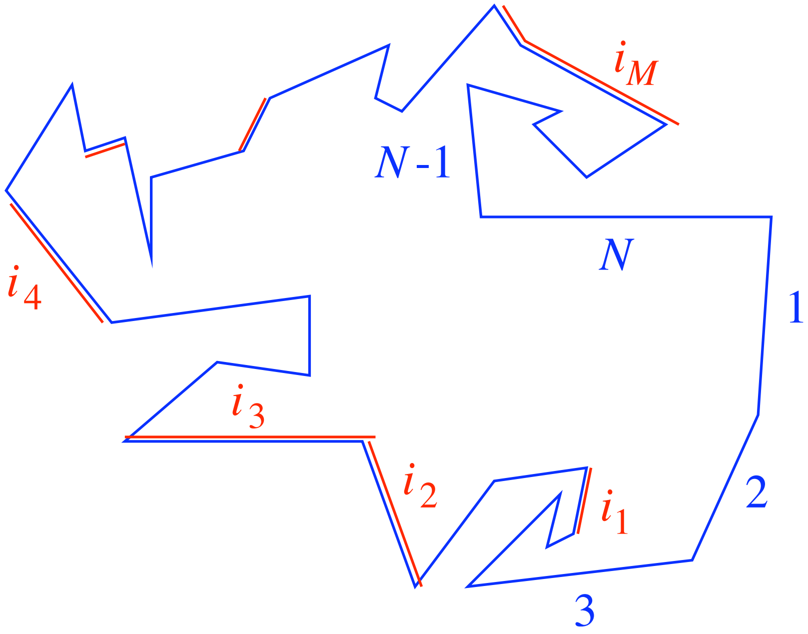
- fonction génératrice
- méthode du col

$\Big\}$ corrélation entre M variables $\mathbf{p}_{i_1},\ \ldots,\ \mathbf{p}_{i_M}$

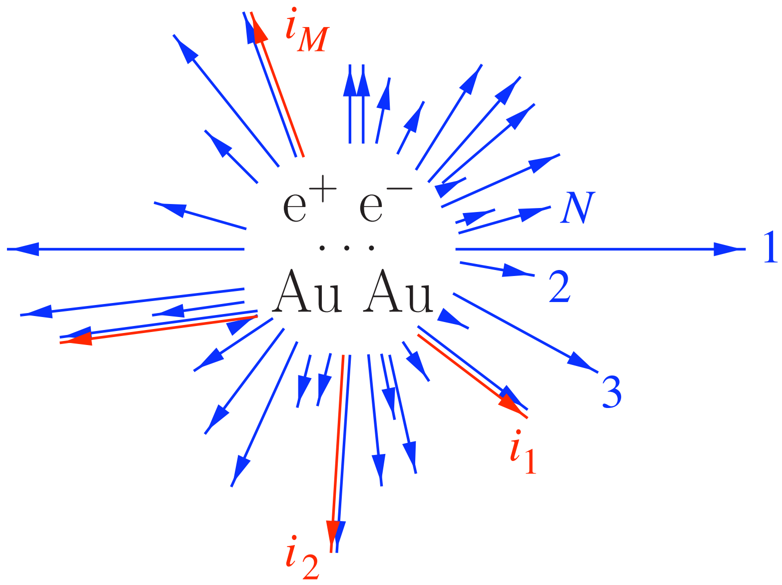
N.B., `hep-ph/03020139`, à paraître dans Eur. Phys. J. **C**

POSITION (ET INTERET ?) DU PROBLEME

polymère fermé à N chaînons :



N particules contraintes par la conservation de l'impulsion :



Question : quelle est la corrélation entre M chaînons/particules quelconques induite par la contrainte globale $\mathbf{p}_1 + \cdots + \mathbf{p}_N = \mathbf{0}$?

CORRELATIONS MULTIPLES & CUMULANTS

- Distribution de probabilité à M particules : $f(\mathbf{p}_{i_1}, \ldots, \mathbf{p}_{i_M})$

$$f(\{\mathbf{p}_{i_k}\}) = \mathcal{O}(1),\ \forall M$$

fonction génératrice des distributions de probabilité :

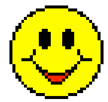
$$G(x_1, \ldots, x_N) = 1 + x_1\, f(\mathbf{p}_1) + x_2\, f(\mathbf{p}_2) + \ldots + x_1 x_2\, f(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) + \ldots$$

- Partie connexe (cumulant) de la distribution de probabilité : $f_c(\mathbf{p}_{i_1}, \ldots, \mathbf{p}_{i_M})$

$$f(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = f_c(\mathbf{p}_1)\, f_c(\mathbf{p}_2) + f_c(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$$

fonction génératrice des cumulants :

$$\ln G(x_1, \ldots, x_N) = x_1\, f_c(\mathbf{p}_1) + x_2\, f_c(\mathbf{p}_2) + \ldots + x_1 x_2\, f_c(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) + \ldots$$



CORRELATIONS MULTIPLES & CUMULANTS

Scaling des cumulants ?

Pour un système constitué de sous-systèmes indépendants (ou avec des interactions à courte portée), les distributions de probabilité s'ajoutent :

$$f(\{\mathbf{p}_j\}) = \sum_A \frac{N_A}{N} f_A(\{\mathbf{p}_j\}), \quad \text{soit} \quad G(\{x_j\}) = \prod_A g_A(\{N_A\, x_j/N\})$$

Au niveau des cumulants, $\ln G(\{x_j\}) = \sum_A \ln g_A(\{N_A\, x_j/N\})$

$$\Longrightarrow \quad f_c(\mathbf{p}_{i_1}, \ldots, \mathbf{p}_{i_M}) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^{M-1}}\right)$$

Et dans le cas de particules liées par la conservation de l'impulsion ?

CONSERVATION DE L'IMPULSION
ET DISTRIBUTION A M PARTICULES

En présence de la contrainte globale due à la conservation de l'impulsion, la distribution à M particules s'écrit :

distribution à 1 particule

en l'absence de contrainte

constante de normalisation

$$f(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_M) \equiv \frac{\left(\prod_{j=1}^{M} F(\mathbf{p}_j)\right) \int \delta^D(\mathbf{p}_1 + \cdots + \mathbf{p}_N) \prod_{j=M+1}^{N} \left[F(\mathbf{p}_j)\, \mathrm{d}^D\mathbf{p}_j\right] / \mathcal{N}_D^{N-M}}{\int \delta^D(\mathbf{p}_1 + \cdots + \mathbf{p}_N) \prod_{j=1}^{N} \left[F(\mathbf{p}_j)\, \mathrm{d}^D\mathbf{p}_j\right] / \mathcal{N}_D^{N}}$$

$1/\mathcal{C}_D$, dénominateur indépendant de M

$$\int \frac{\mathrm{d}^D\mathbf{k}}{(2\pi)^D} \prod_{j=1}^{N} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}_j}$$

On injecte dans la fonction génératrice…

FONCTION GENERATRICE

En notant $\langle g(\mathbf{p})\rangle \equiv \int g(\mathbf{p}) F(\mathbf{p})\,\mathrm{d}^D\mathbf{p}/\mathcal{N}_D$, on a :

$$
\begin{aligned}
G(x_1,\ldots,x_N) &= \mathcal{C}_D \int \frac{\mathrm{d}^D\mathbf{k}}{(2\pi)^D} \left\langle e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}}\right\rangle^N \exp\left(\sum_{j=1}^N x_j F(\mathbf{p}_j) \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}_j}}{\left\langle e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}}\right\rangle}\right) \\
&= \mathcal{C}_D \int \frac{\mathrm{d}^D\mathbf{k}}{(2\pi)^D} \exp\left[N\left(\underbrace{\ln\left\langle e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}}\right\rangle + \sum_{j=1}^N \frac{\bar{x}_j}{N}\frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}_j}}{\left\langle e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}}\right\rangle}}_{\mathcal{F}(\mathbf{k})}\right)\right]
\end{aligned}
$$

ne dépend que de $\dfrac{x}{N}$

On va montrer (méthode du col) que $G(x_1,\ldots,x_N) \propto e^{N\mathcal{F}(\mathbf{k}_0)}\left(1 + \sum_{q>l}\frac{x^l}{N^q}\right)$.

METHODE DU COL

Un développement de Taylor autour du point-selle $\mathbf{k}_0$ donne:

$$G(x_1,\ldots,x_N) = \mathcal{C}_D\, e^{N\mathcal{F}(\mathbf{k}_0)} \underbrace{\left(\sum \text{intégrales gaussiennes}\right)}$$

$$\frac{1}{N^{D/2}} \underbrace{\int \frac{\mathrm{d}^D\kappa}{(2\pi)^D}\, e^{-\mathcal{F}''(\mathbf{k}_0)\,\kappa^2/2}}_{\frac{1}{[2\pi\underline{\mathcal{F}''(\mathbf{k}_0)}]^{D/2}}} \exp\left[\sum_{m\geq 3} \underbrace{\frac{\mathcal{F}^{(m)}(\mathbf{k}_0)}{m!}} \underbrace{\frac{\kappa^m}{N^{m/2-1}}}_{\leq 1/\sqrt{N}}\right]$$

ne dépend que de $\dfrac{x}{N}$

d'où $$G(x_1,\ldots,x_N) = \frac{\mathcal{C}_D\, e^{N\mathcal{F}(\mathbf{k}_0)}}{[2\pi N\mathcal{F}''(\mathbf{k}_0)]^{D/2}} \left(1 + \sum_{q>l} \frac{x^l}{N^q}\right).$$

CUMULANTS

Soit encore $\ln G(x_1, \ldots, x_N) = \ln \mathcal{C}_D + N\,\underbrace{\mathcal{F}(\mathbf{k}_0)}_{\text{fonction de } \frac{x}{N}} + \ln\left(\text{fonction de } \dfrac{x^l}{N^{q \geq l}}\right)$

indépendant de x

$\mathcal{F}$ ne dépend que de x/N

$\mathbf{k}_0$ fonction de x/N
$(\mathcal{F}'(\mathbf{k}_0) = 0)$

d'où les cumulants :

$$f_c(\mathbf{p}_{i_1}, \ldots, \mathbf{p}_{i_M}) = \begin{matrix} \text{coef. de } x_{i_1} \cdots x_{i_M} \\ \text{dans } N\mathcal{F}(\mathbf{k}_0) \end{matrix} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^M}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^{M-1}}\right)$$

Les cumulants induits par la conservation de l'impulsion totale suivent la même loi d'échelle que dans le cas d'une interaction à courte portée !

EXEMPLE DE CALCUL DE CUMULANT

- Le point-selle est donné par $\boxed{\mathcal{F}'(\mathbf{k}_0) = 0}$:

$$\text{à l'ordre le plus bas,} \qquad i\mathbf{k}_0 = -\frac{D}{\langle \mathbf{p}^2 \rangle} \sum_{j=1}^{N} \frac{x_j}{N} \mathbf{p}_j$$

- Les cumulants sont donnés par $\boxed{\ln G(x_1, \ldots, x_N) = N\mathcal{F}(\mathbf{k}_0)}$:

$$\mathcal{F}(\mathbf{k}_0) = \sum_{j=1}^{N} \frac{x_j}{N} - \frac{D}{2\,\langle \mathbf{p}^2 \rangle} \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{x_j}{N} \mathbf{p}_j \right)^2$$

ce qui donne $\quad f_c(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = -\dfrac{D\,\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{N\,\langle \mathbf{p}^2 \rangle}, \quad$ qui est bien d'ordre $\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{N}\right)$.