MATH. METHODEN DER PHYSIK I

WS 2015/2016: Übungsblatt 9

33. Zeigen Sie, dass $\lim_{\epsilon\to 0} f_\epsilon(x) = \delta(x)$ für folgende Funktionen

$$f_\epsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} - \left|\frac{x}{\epsilon^2}\right| & \text{für } |x| \leq \epsilon \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad , \qquad f_\epsilon(x) = \frac{1}{2\epsilon} e^{-\frac{|x|}{\epsilon}}$$

34. Zeigen Sie, dass für $f_n(x) = n/(2\cosh^2 nx)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx = 1$$

und

$$\int_{-\infty}^{x} f_n(t) dt = \frac{1}{2}[1 + \tanh nx] =: u_n(x).$$

Zeigen Sie weiterhin, dass $u_n(x)$ die Heaviside-Sprungfunktion $\Theta(x)$ als Limes für $n \to \infty$ hat.
Hinweis: Betrachten Sie als erstes die Ableitung von $\tanh x$.

35. Berechnen Sie

$$\int_0^{3\pi} dx\, x^2 \delta(\cos x)\,, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-x^2} \delta(x^2 - 1)$$

36. Berechnen Sie die Fourierreihe D zur δ-“Funktion” auf dem Intervall $[-\pi, +\pi]$ und zeigen Sie, dass in der Tat gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) D(x) = f(0)\ .$$

Hinweis: Stellen Sie auch $f(x)$ durch eine Fourierreihe dar.