MATH. METHODEN DER PHYSIK I

WS 2015/2016: Übungsblatt 8

29. Berechnen Sie (a reell)

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n+1}}$$

30. Angenommen folgende Integralgleichung sei für den Realteil u einer Funktion f gegeben

$$\frac{1}{1+x_0^2} = \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(x)}{x-x_0}dx$$

Bestimmen Sie $u(x)$ über Kramers-Kronig.

31. Zeigen Sie, dass die Funktionen $\varphi_k(x) = \exp(ikx)$, $k \in \mathbb{Z}$, x reell, orthogonal bezgl. des (hermiteschen) Skalarprodukts

$$\langle f|g\rangle = \int_0^{2\pi} dx\, f^*(x)g(x)$$

sind. Normieren Sie diese Funktionen so, dass $\langle\varphi_k|\varphi_l\rangle = \delta_{kl}$.

32. a) Zeigen Sie, dass

$$\langle f|g\rangle = \int_0^{+\infty} dx\, e^{-x} f(x)g(x)$$

bei geeigneten Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ ein Skalarprodukt definiert.

b) Betrachten Sie die Menge der Polynome vom Grad 2, $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, alles reell. Überzeugen Sie sich, dass diese Menge ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit der üblichen Addition und Multiplikation als Verknüpfungen ist. Mögliche Basisvektoren sind die Funktionen $f_0(x) = 1, f_1(x) = x$ und $f_2(x) = x^2$, warum ? Konstruieren Sie mit dem Gram-Schmidt Verfahren eine Orthonormalbasis bezgl. des Skalarprodukts aus a).