MATH. METHODEN DER PHYSIK I

WS 2015/2016: Übungsblatt 12

41. Bestimmen Sie die Summe
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2 - 1}$$
aus der Fourierreihe zu $f(x) = |\sin x|$, $x \,\epsilon\, [-\pi, +\pi]$.

42. Untersuchen Sie die Eigenschaften der Fouriertransformierten $\tilde{f}(\omega)$ von $f(t)$, wenn
a) f reell,
b) f imaginär,
c) f gerade in t und
d) f ungerade in t ist.

43. Ein Rechteckpuls wird durch die Funktion $f(t) = 1$ für $|t| < a$ und $f(t) = 0$ für $|t| > a$ beschrieben. Berechnen Sie die Fouriertransformierte. Benutzen Sie dann die "power"-Spektrum Relation aus der Vorlesung, um das Integral
$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, \frac{\sin^2 t}{t^2}$$
auszurechnen.

44. Ein Wellenpaket ist durch die Funktion $\psi(x,t)$,
$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \phi(k) \exp(\, i\, [\, kx - \omega(k) t\,])$$
gegeben. Bestimmen Sie $\psi(x, t = 0)$ und $|\psi(x, t = 0)|^2$ für die Gauß-Verteilung
$$\phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} a} e^{-(k-k_0)^2/(2a^2)}.$$
Freiwillige Zusatz(fleiß)aufgabe: Zeigen Sie für $\omega(k) = \hbar k^2/(2m)$, dass
$$|\psi(x,t)|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \frac{m}{\sqrt{m^2 + \hbar^2 a^4 t^2}} \exp\left[-\frac{m^2 a^2}{m^2 + \hbar^2 a^4 t^2} \left(x - \frac{\hbar k_0}{m} t \right)^2 \right]$$
Hinweis: Sie können benutzen, dass $\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \exp(-cx^2) = \sqrt{\pi/c}$ für komplexe c mit positivem Realteil.