MATH. METHODEN DER PHYSIK I

WS 2015/2016: Übungsblatt 0

a. Die Bernoulli-Funktionen $B_n(s)$ sind durch

$$\frac{xe^{xs}}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(s) \frac{x^n}{n!}$$

definiert. Bestimmen Sie $B_n(s)$ für $n = 0$ und 1.

b. Die Polylogarithmen $Li_n(z)$ sind über die Reihe

$$Li_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n}$$

definiert. Zeigen Sie, dass für $0 < z < 1$, z reell,

$$\frac{1}{n!} \int_0^{\infty} \frac{t^n}{e^t/z - 1} dt = Li_{n+1}(z)$$

Diese Integrale tauchen in der Thermodynamik von Bose-Einstein Gasen auf.
Hinweise: Entwickeln Sie den Integranden und bringen ihn auf eine Form $\sim \Gamma(n)$. Dabei ist Γ die Gamma-Funktion:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

für $\Re z > 0$. Zeigen Sie dann durch partielle Integration, dass $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Damit reduziert sich die Rechnung auf die Lösung des Integrals für $\Gamma(1)$.